В. Н. Родионов

ФИЗИКА ДЛЯ КОЛЛЕДЖЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 53(075.32)
ББК 22.3я723
Р60

***Автор*:**

Родионов Василий Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, академик естественных наук РАЕН, профессор кафедры информатики естественнонаучного технологического кластера Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова.

***Рецензенты*:**

Треушников Е. Н. — доктор физико-математических наук, профессор Московского технологического университета (МИРЭА);

Садыков Т. М. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова.

Родионов, В. Н.

Р60 Физика для колледжей : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. Н. Родионов. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 202 с. — (Профессиональное образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-10835-4

Издание представляет собой сборник учебно-методических материалов по курсу общей физики. Большое внимание уделяется корректному определению физических понятий и их взаимосвязям, возникающим при изучении различных физических явлений. Предпочтение отдается наиболее простым физическим моделям, допускающим количественное описание при минимальном знакомстве с математическим аппаратом. Приведены задачи различной степени сложности, большая часть которых содержит решения. Остальные задачи представлены для самостоятельной работы и предназначены для контроля эффективности изучения текущего материала.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования.

УДК 53(075.32)
ББК 22.3я723

ISBN 978-5-534-10835-4

Оглавление

Предисловие

Предлагаемое читателю учебное пособие представляет собой сборник учебно-методических материалов по курсу общей физики для колледжей. Основной целью пособия является формирование у учащихся целостного представления о физических процессах и явлениях, протекающих в природе, а также выработка понимания современных научных методов познания природы. Большое внимание уделяется корректному определению физических понятий и их взаимосвязям, возникающим при изучении различных физических явлений. Предпочтение отдается наиболее простым физическим моделям, допускающим количественное описание при минимальном знакомстве с математическим аппаратом.

Одной из отличительных черт пособия является подбор и представление материала в форме, удобной для самостоятельной работы студентов. С этой целью теоретическое описание физических явлений снабжено достаточно широким набором задач различной сложности. Бо́льшая часть приведенных задач содержит решения. Остальные задачи представлены для самостоятельной работы и предназначены для контроля эффективности изучения текущего материала. В результате овладения представленным материалом у студента формируются знания и умения, необходимые при выполнении профессиональных обязанностей. Приведенные задачи также могут использоваться для подготовки к интернет-тестированию остаточных знаний учащихся.

Учебник включает семь глав и одно приложение.

Первая глава «Основные физические и математические понятия» рассматривает принципы описания и измерения физических величин, используемые математические термины и понятия, принятые обозначения физических величин и описание простейших математических операций над величинами, соответствующими основным физическим величинам. Здесь же приводятся некоторые сведения о линейных дифференциальных уравнениях и элементарные понятия о дифференциальных операторах и уравнениях математической физики.

Во второй главе изучаются основы механики: описания различных моделей тел и их состояний в классической механике, а также формулируются основы классической кинематики и динамики. Подробно изучаются уравнения движения, законы сохранения, основы релятивистской механики и принцип относительности в механике.

В третьей главе рассмотрены вопросы механики сплошной среды, а также молекулярной физики и термодинамики. Рассмотрены принципы описания жидкостей и газов, основные уравнения кинетической теории газов, уравнение Менделеева — Клапейрона, удельные теплоемкости газов, первое и второе начала термодинамики.

В четвертой главе исследуются явления электростатики и законы постоянного электрического тока. В частности, изучаются: закон Кулона, вопросы, связанные с расчетом напряженности электрического поля и потенциалов, теорема Остроградского — Гаусса, эквипотенциальные поверхности, электроемкость и законы Ома в дифференциальной и интегральной формах, взаимодействие системы заряженных частиц.

В пятой главе изучаются законы электромагнетизма. Сюда включаются закон Био — Савара — Лапласа, закон Ампера, законы электромагнитной индукции, расчет магнитного момента контура с током, магнитного поля внутри соленоида, потенциальной энергии контура с током в магнитном поле.

В шестой главе рассмотрен раздел колебаний и волн. Изучаются гармонический и ангармонический осцилляторы, механические (упругие) волны, физический смысл спектрального разложения, кинематика волновых процессов, нормальные моды, электромагнитные колебания, интерференция и дифракция волн, материальные уравнения, квазистационарные токи, принцип относительности в электродинамике, основы геометрической оптики.

В седьмой главе рассмотрены элементы атомной и ядерной физики, а также изучены основы физики твердого тела. Изучаются теории Бора для водородоподобного атома, волновые свойства частиц, энергетический спектр атомов и молекул, природа химический связи. Кроме того, здесь рассмотрены основы строения атомных ядер, законы радиоактивного распада, физические свойства кристаллов, магнетизм вещества, тепловые, электрические свойства металлов.

В приложениях дано описание основных физических постоянных, рассмотрены множители и приставки для обозначения десятичных кратных и дольных единиц, единицы СИ, имеющие специальное название, и приведен ряд важных математических формул, используемых в расчетах основных физических величин.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен:

освоить трудовые действия

— использования основных физических принципов обеспечения безопасности собственной жизни;

— рационального природопользования и охраны окружающей среды;

приобрести необходимые умения

— проводить наблюдения, планирование и выполнение экспериментов;

— строить гипотезы и основные физические модели;

— применять полученные знания по физике для объяснения разнообразных физических явлений и свойств веществ;

— осуществлять практическое использования физических знаний;

— оценивать достоверность естественнонаучной информации;

получить необходимые знания

— о фундаментальных физических законах и принципах, лежащих в основе современной физической картины мира;

— наиболее важных открытиях в области физики, оказавших определяющее влияние на развитие техники и технологии;

— методах научного познания природы.

Учебное пособие предназначено для учащихся колледжей. Кроме того, благодаря отбору материала, уровню и способу изложения оно может быть полезно для студентов и преподавателей СПО и некоторых высших учебных заведений.

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Физические явления

Человек в своей жизни не может не взаимодействовать с окружающей его природой. Физика — одна из фундаментальных наук, которая выросла из практических потребностей человечества в наблюдении и использовании различных свойств физических объектов. Физические объекты — это те предметы материального мира, с которыми человеку приходится сталкиваться в его жизни и деятельности и которые он может воспринимать через свои ощущения. Восприятие материальных объектов происходит через их явления. *Физическое явление есть обнаружение сущности предметов, т. е. необходимых их сторон и взаимосвязей с другими предметами через свойства и отношения, доступные органам чувств человека.*

Известно, что и математика, представляющая собой науку о числах и методах вычислений, зародилась и стала развиваться благодаря необходимости, возникшей у людей при наблюдении явлений природы. Однако, в отличие от математиков, физики, основываясь на опытных фактах, не только непосредственно наблюдают и отображают характеристики реальных явлений в систему чисел, но и выясняют наблюдаемые закономерности в природе. Устанавливая наиболее общие законы природы, физика подразумевает и появление целого ряда следствий этих законов, которые приобретают самостоятельную значимость. Поэтому развитие физики приводит к созданию не только целостной картины нашею мира, но и воплощается во многие технические приложения, и в частности в такие инженерные области, как энергетика, связь, науки о Земле, технологии разведки и добычи полезных ископаемых, транспорт, обработка материалов и т. п.

1.1.1. Физические величины. *Величина — это то, что можно исчислить или выразить числом.* Некоторые качественные характеристики физических явлений допускают количественное выражение. Соответствие количества и качества определяет *физическую величину.* Поэтому, определяя ту или иную характеристику физического явления и называя число, обязательно добавляют определенный символ, указывающий на ее качественную принадлежность или размерность, например *см, кг* или *с.* Определение физической величины должно содержать способ ее измерения и размерность. Значение физической величины может определяться одним числом или набором нескольких чисел. В первом случае это *скалярные величины,* например *масса, температура, давление.* Во втором — это *векторные величины,* например *скорость, ускорение, сила,* для определения которых в пространстве трех измерений необходимо знание трех величин — проекций на оси координат.

1.1.2. Измерение физических величин. *Измерение физической величины есть процесс ее сравнения с однородной величиной, принимаемой за единицу меры.* Точная формулировка способа измерения должна содержать все необходимые указания, а именно: наименование средств измерения (органы чувств, приборы), описание действий, производимых с их помощью над измеряемым объектом, и оценку получаемого результата. Проведение оценки *результата измерения* является необходимым, так как он *всегда* определяется приближенно.

1.1.3. Погрешность измерения. Погрешность измерения зависит как от выбранной процедуры измерения и качества приборов, так и от состояния объекта. В частности, измерение легко деформируемого тела (например, резинового ластика) с помощью штангенциркуля зависит от силы, с которой экспериментатор сжимает прибор, а измерение напряжения в сети с помощью вольтметра вносит погрешность, поскольку вольтметр обладает собственным конечным сопротивлением, что изменяет измеряемое напряжение.

Если измеряется некоторая физическая величина X, то в результате измерения можно лишь утверждать, что истинное значение этой величины заключено в интервале

$$\overline{X} - \Delta < X < \overline{X} + \Delta.$$

Значение $\overline{X}$, лежащее в середине интервала, называется измеренным значением физической величины, а Δ — абсолютной погрешностью измерения или его ошибкой. Отношение абсолютной погрешности Δ к измеренному значению $\overline{X}$

$$\delta = \frac{\Delta}{\overline{X}}$$

называется относительной погрешностью или точностью измерения. Обратим внимание, что чем меньше относительная погрешность, тем выше точность измерения.

1.1.4. Размерность физических величин. Из установленных физических законов следует, что различные физические величины тесно связаны между собой. Совокупность физических величин, связанных между собой зависимостями, называют *системой величин.* Физические величины, входящие в систему и условно принятые в качестве независимых, носят название *основных величин системы.* Международная система единиц (СИ), введенная XI Генеральной конференцией по мерам и весам (1960 г.), устанавливает в качестве основных семь физических величин: *длина, масса, время, сила электрического тока, термодинамическая температура, количество вещества, сила света.* Эти величины вместе с соответствующими единицами представлены в виде таблицы в приложении.

Размерностью физической величины называют выражение, отражающее связь данной величины с основными величинами. Размерность величины A в физике обозначается знаком $[A]$. Основные величины имеют следующие размерности:

L — длина;
M — масса;
T — время;
I — сила тока;
Θ — термодинамическая температура;
N — количество вещества;
J — сила света.

Любая физическая величина A имеет размерность

$$[A] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\varepsilon} J^{\varsigma} N^{\eta},$$

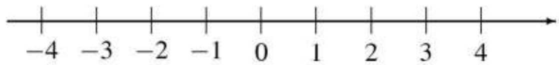
где α, β, γ, δ, ε, ς, η — рациональные числа.

В формуле размерности величины с нулевыми показателями степени принято опускать. Например, размерность скорости $[V] = LT^{-1}$, а размерность гравитационной постоянной $[G] = M^{-1}L^{3}T^{-2}$. Величина, у которой в формуле размерности все показатели степени равны нулю, называется безразмерной величиной. Примерами таких величин являются: показатель преломления, коэффициент трения, диэлектрическая и магнитные проницаемости вещества и др.

1.2. Математические термины, символы, обозначения и методы

Хорошо известно, что физические законы записываются в форме математических выражений. Эти выражения позволяют придать физическим законам более совершенную форму по сравнению со словесными определениями. Таким образом, математика является как бы более совершенным языком физики. Но, что еще более важно, с помощью правил обращения с математическими величинами можно получать многочисленные следствия известных физических законов и находить новые факты, которые в свою очередь допускают экспериментальную проверку. Опытной проверкой следствий законов природы и поиском новых опытных фактов занимается экспериментальная физика. Объяснение известных экспериментальных фактов, формулировка законов природы, а также поиск и предсказание новых эффектов проводятся физиками-теоретиками. Изучение физики предполагает выяснение как экспериментальных предпосылок создания физических теорий, так и анализ их следствий. Поэтому знание основных понятий, формул и методов математики, а также умение проводить простейшие математические преобразования становятся необходимыми атрибутами, определяющими успешное усвоение физических представлений.

1.2.1. Числовая ось. Числа, используемые для характеристики физических величин, составляют множество действительных чисел. Их можно отобразить на прямую, простирающуюся от $-\infty$ до ∞:



На этой прямой располагаются не только обозначенные на рисунке точки, представляющие целые положительные и отрицательные числа, но и рациональные числа, которые представимы в виде $r = p/q$, где p и q — целые числа, а также иррациональные числа, которые представимы бесконечными непериодическими десятичными дробями (как, например, $\sqrt{2}, \sqrt{5}$, а также числа e, π и др.). Отметим, что целые, рациональные и иррациональные числа образуют соответствующие подмножества множества действительных чисел.

1.2.2. Векторы. *Вектором* называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом. Любой вектор характеризуется как направлением, так и своим численным значением. Положение заданной точки A в пространстве относительно выбранной системы отсчета задается *радиус-вектором r,* соединяющим начало координат с точкой A (рис. 1.1).

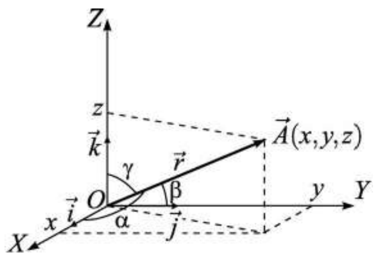


Рис. 1.1

При определении векторов чаще всего применяется прямоугольная (декартова) система координат, базис которой образуют три взаимно перпендикулярных (ортогональных) вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ единичной длины, проведенных из одной и той же точки (начала координат). Любой вектор $\vec{r}$ можно разложить по базису:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k},$$

при этом числа x, y, z называются *координатами* вектора в декартовой системе координат. Если граничные точки вектора имеют координаты $\vec{A}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{B}(x_2, y_2, z_2)$; то координаты x, y, z вектора $\overline{AB}$ определяются следующим образом:

$$x = x_2 - x_1,\ y = y_2 - y_1,\ z = z_2 - z_1.$$

Это обозначают как $\overrightarrow{AB} = \{x, y, z\}$. При переносе вектора параллельно самому себе его значение не меняется. Длина вектора (или, что то же самое, его *модуль)* определяется по теореме Пифагора:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При обозначении модуля вектора помимо обозначения $|\vec{a}|$ общепринято использование той же буквы без стрелки: a обозначает то же самое, что и $|\vec{a}|$.

Если α, β, γ — углы, которые составляет вектор $\vec{r}$ с осями *OX, OY, OZ,* то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называют *направляющими косинусами* вектора $\vec{r}$. Справедливы формулы

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\cos\beta,\ z = r\cos\gamma,\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Проекцией вектора $\vec{a}$ на произвольную ось l, образующую с вектором $\vec{a}$ угол φ, называется величина $a_l = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на произвольную плоскость s, образующую с вектором $\vec{a}$ угол ψ, называется величина $a_s = |\vec{a}|\cos\psi$ (рис. 1.2).

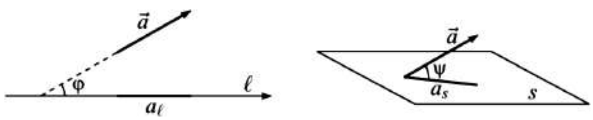


Рис. 1.2

Векторы называются *коллинеарными,* если они лежат на одной прямой или параллельных прямых (обозначение $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если векторы одинаково направлены, и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ — если векторы направлены в противоположные стороны).

Три и более векторов называются *компланарными,* если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

1.2.3. Линейные операции над векторами. *Суммой* $\vec{a} + \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совмещено с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 1.3).

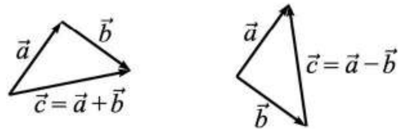


Рис. 1.3

Соответственно, *разностью* $\vec{a} - \vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число m называется такой вектор $\vec{b} = m\vec{a}$, что $|\vec{b}| = m|\vec{a}|$ и $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ при $m > 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $m < 0$.

1.2.4. Скалярное произведение. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначаемое $(\vec{a},\vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$, — это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi. \qquad (*)$$

Если угол между векторами острый, то их скалярное произведение положительно, если же тупой — отрицательно. Если угол между векторами прямой, то их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ можно вычислить по формуле

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \qquad (**)$$

С помощью скалярного произведения по формулам (*) и (**) можно вычислить косинус между векторами, а следовательно, и сам угол.

1.2.5. Векторное произведение. Некомпланарная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется правой (или левой), если после приведения к общему началу кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден из конца третьего вектора $\vec{c}$ совершающимся по часовой стрелке (или против часовой стрелки) (рис. 1.4).

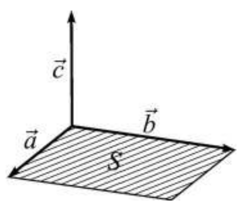


Рис. 1.4

Векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначаемое $[\vec{a},\vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$, — это вектор $\vec{c}$, численно равный произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$; перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является правой. Векторное произведение антисимметрично: $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$. Согласно определению векторного произведения длина вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ численно равна площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах.

1.2.6. Функция. *Функция* — это правило или закон, по которому каждому числу x из множества всех возможных его значений X (например, множества действительных чисел) ставится в соответствие некоторое число y из множества Y (рис. 1.5).

Например, функция

$$y = f_1(x) = x^2$$

устанавливает соответствие точек

$$0 \to 0,\ 1 \to 1,\ 2 \to 4$$

и т. д., а функция $y = f_2(x) = \sin(x)$ диктует другой закон и другое соответствие точек:

$$0 \to 0,\ \frac{\pi}{2} \to 1,\ \pi \to 0.$$

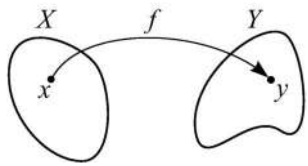


Рис. 1.5

Часто x называют независимой переменной или аргументом функции, а y — зависимой переменной или функцией аргумента x. Величина y может быть функцией нескольких переменных, например

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

1.2.7. Предел функции. Говорят, что функция имеет предел

$$\lim_{x \to a} f(x) = M = \mathrm{const}$$

при x, стремящемся к конечному значению $x = a$, если для каждого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $\delta > 0$, что как только аргумент попадает в δ-окрестность числа a, т. е.

$$0 < |x - a| < \delta,$$

то функция $f(x)$ определена и ее значения попадают в ε-окрестность числа M:

$$0 < |f(x) - M| < \varepsilon.$$

1.2.8. Производная функции. Первая производная (производная первого порядка) функции $y = f(x)$ по x в точке x есть предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv f'(x) \equiv y'.$$

Дифференциал функции может быть найден по правилу

$$dy = f'(x)dx.$$

Он выражает главную линейную часть приращения функции. Правила дифференцирования позволяют составить таблицу производных различных функций (см. приложение). В случае функции многих переменных

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

производная по определенной независимой переменной обозначается как

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv f_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

и находится как обычная производная при фиксированных значениях остальных независимых переменных x_2, x_3, …, x_n. Этот тип производной называется частной производной.

1.2.9. Первообразная функции. Определенный интеграл. Для ряда функций можно найти так называемые первообразные функции или неопределенные интегралы. Это такие функции, производные которых равны исходным функциям. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в интервале $[a, b]$ неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, если существует такая функция $F(x)$ (называемая первообразной), что $F'(x) = f(x)$ на $[a, b]$. Полагают, что

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная константа.

Результаты нахождения первообразных для ряда функций могут быть легко установлены и сведены в таблицу (см. приложение). Если для функции $f(x)$ известна первообразная функции $F(x)$ на интервале $[a, b]$, то может быть вычислен определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Для этого нужно воспользоваться формулой Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

1.2.10. Методы дифференцирования и интегрирования в физике. Эти методы кроме отражения основных математических операций тесно связаны с расширением границ применимости физических законов. Как известно, содержание физического закона не является абсолютным, т. е. нельзя просто записать закон. Для его понимания нужно обязательно сформулировать условия, при которых данный закон будет справедлив.

Например, если предположить, что физический закон имеет вид

$$Z = YX,$$

где Z, Y, X — некоторые физические величины, причем

$$Y = \text{const},$$

то в этом случае зависимость выражается простыми графиками (рис. 1.6). Можно ли распространить этот простой вид линейной зависимости на случай, когда Y не является const, а также зависит от величины X, т. е. $Y = Y(X)$?

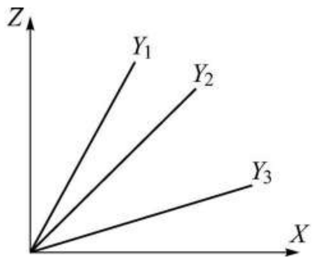


Рис. 1.6

Оказывается, что это можно сделать, если выделить очень малый участок изменения величины X, т. е.

$$\Delta X = X_2 - X_1,$$

что в свою очередь выделяет на кривой $Y(X)$ малое изменение функции (рис. 1.7)

$$\Delta Y = Y_2 - Y_1.$$

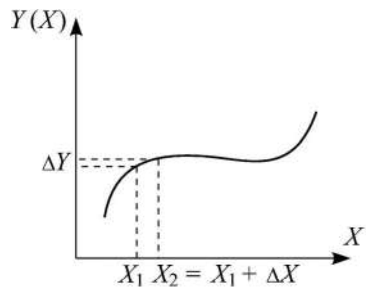


Рис. 1.7

Если установить предел отношения

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = A_1$$

при $\Delta X \to 0$, то величина A_1 будет иметь постоянное значение в данной точке X_1. В силу того что на малом участке ΔX величина $A_1 \cong \text{const}$, на этом малом промежутке (от X_1 до X_2) можно пренебречь изменением Y и считать приближенно $Y \approx A_1$. Но тогда на промежутке ΔX можно записать

$$\Delta Z = A_1 \Delta X,$$

где $A_1 = A(X_1)$.

Учитывая, что подобная процедура может быть проделана в любой точке X, в общем виде получим

$$dZ = Y(X)dX.$$

Это дифференциальная форма физического закона. Что она выражает? Обычно этот закон читают так: «Малое изменение величины X вызывает также малое изменение величины $Z(X)$». Коэффициент пропорциональности Y в этом случае зависит от величины X, поскольку в каждой точке X величина Y имеет свое определенное значение. Дифференциальная форма закона может быть записана и другом виде:

$$Y(X) = dZ / dX.$$

Примером может служить соотношение для определения пути прямолинейного движения (S) через скорость (V) и время (t):

$$S = Vt.$$

Хорошо известно, что эта формула справедлива лишь в случае равномерного движения, т. е. при V = const. Скорость (V) может зависеть от времени (t) произвольным образом $V(t)$, но если брать очень малые интервалы времени, то в пределах такого интервала можно считать, что связь величин S, V и t сохраняет вид, справедливый при V = const. Таким образом, дифференциальная форма этого закона имеет вид

$$dS = V(t)dt,$$

или

$$V(t) = \frac{dS}{dt}.$$

Тем самым можно утверждать, что одно из преимуществ использования производных и дифференциалов заключается в том, что при малых изменениях мы можем получать очень простые формулы. С учетом того, что для вычисления производных существуют специальные математические методы (результаты которых можно свести к таблице), мы имеем важный инструмент получения физических законов в дифференциальной форме.

Если необходимо из дифференциальной зависимости (т. е. зависимости в конкретных точках изменения аргумента) получить полную зависимость некоторой физической величины, то нужно совершить операцию, обратную дифференцированию. Эта процедура и называется интегрированием.

Как отмечалось, в математическом плане целью интегрирования является нахождение таких функций (первообразных), производные которых совпадают с исходными функциями. В ряде случаев операция интегрирования может быть сведена к простым приемам. Например, если имеется выражение

$$dZ = Y(X)dX,$$

то, находя интегралы от левой и правой частей дифференциального равенства

$$\int dZ = \int Y(X)dX,$$

можно легко получить результат

$$Z = \int Y(X)dX.$$

При известной зависимости $Y(X)$ правая часть может быть также вычислена, например, по таблице интегралов. В частности, для случая равноускоренного движения материальной точки, движущейся с постоянным ускорением a и со скоростью, зависящей от времени по закону (рис. 1.8)

$$v(t) = v_0 + at,$$

имеем

$$dS = v(t)dt = (v_0 + at)dt.$$

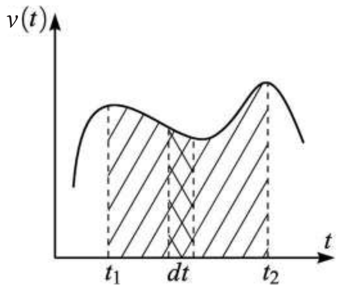


Рис. 1.8

Если взять интеграл от левой и правой частей равенства и использовать простейшие правила интегрирования, то отсюда нетрудно получить закон изменения пройденного пути со временем:

$$S = \int (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Отметим, что определенный интеграл (графически) представляет площадь под кривой (площадь криволинейной трапеции), расположенную между крайними точками интегрирования.

Таким образом, описанная методика при анализе физических задач состоит в следующем. Сначала находят, как связаны малые приращения аргумента и функции. Это достигается путем дробления аргумента на очень малые части. Если аргументом является время, то малые промежутки должны быть такими, чтобы в их пределах процесс можно было бы считать *равномерным.* Затем путем интегрирования восстанавливается полная зависимость.

Аналогичные приемы можно применить и к случаям функций многих переменных. Например, если рассматриваются тела, обладающие неоднородными свойствами, то нужно так раздробить тело, чтобы в пределах этих раздробленных частей его свойства можно было бы считать одинаковыми. Например, если тело обладает плотностью, зависящей от пространственных координат $\rho(x, y, z)$, то масса отдельного элемента может быть подсчитана по формуле

$$dm = \rho(x, y, z)dxdydz.$$

Находя интегралы от обеих частей этого равенства, можно получить полную массу всею тела в виде

$$m = \iiint \rho(x, y, z)dxdydz,$$

где интегрирование ведется по всему объему, занимаемому телом (рис. 1.9).

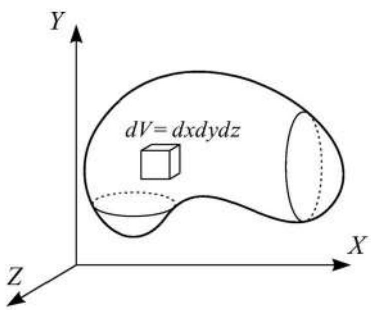


Рис. 1.9

1.2.11. Комплексные числа. Формально мнимой единицей j называют число, дающее в квадрате «минус единицу»: $j^2 = -1$. Введение мнимой единицы позволяет определить *комплексные числа. Алгебраической формой* комплексного числа называют выражение вида

$$z = a + jb,$$

где a и b — произвольные действительные числа. Величину a называют реальной, а b — мнимой частью комплексного числа. Соответствующие обозначения имеют вид $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$. Частными случаями комплексного числа являются действительное число $\mathrm{Im}(z) = 0$ и чисто мнимое число $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Комплексные числа наглядно изображаются векторами в *комплексной плоскости,* причем проекция этого вектора на ось абсцисс соответствует действительной части комплексного числа, а на ось ординат — мнимой. Комплексные числа равны, только если равны их и действительные, и мнимые части. Векторы, изображающие равные комплексные числа, совпадают. Знак алгебраического неравенства в отношении комплексных чисел, вообще говоря, неприменим, и понятий «больше» — «меньше» для комплексных чисел не существует.

Тригонометрической формой записи комплексного числа называют выражение вида

$$z = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

где ρ — модуль, или *абсолютная величина*, комплексного числа $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; φ — его аргумент, $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$. Естественно, здесь

$$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Переход от алгебраической к тригонометрической форме представления комплексного числа эквивалентен переходу от декартовой к полярной системе координат в векторной алгебре.

Показательной формой представления комплексного числа называют выражение

$$z = \rho\exp(j\varphi).$$

Для перехода от тригонометрической к показательной форме удобно использовать известную формулу Эйлера

$$\exp(j\varphi) = \cos\varphi + j\sin\varphi.$$

Два числа z и z* называют *комплексно-сопряженными,* если их действительные части (модули) одинаковы, а мнимые части (аргументы) отличаются только знаком:

$$z = a + jb = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \rho\exp(j\varphi);$$
$$z^* = a - jb = \rho(\cos\varphi - j\sin\varphi) = \rho\exp(-j\varphi).$$

Векторы, изображающие комплексно-сопряженные числа, расположены симметрично относительно действительной оси.

Сложение и *вычитание* комплексных чисел z_1 и z_2 определяются формулой

$$z_1 \pm z_2 = a_1 + jb_1 \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2),$$

т. е. действия над действительной и мнимой частью производятся независимо.

Умножение комплексно-сопряженных чисел z_1 и z_2 осуществляется по обычному правилу умножения многочленов:

$$(a_1 \pm jb_1)\cdot(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1).$$