ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Е. А. Склярова, С. И. Кузнецов, Е. С. Кулюкина

ФИЗИКА. МЕХАНИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

3-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва • Юрайт • 2019

УДК 53(075.32)
ББК 22.3я723
С43

Авторы:

Склярова Елена Александровна — кандидат педагогических наук, доцент кафедры общей физики Физико-технического института Национального исследовательского Томского политехнического университета;

Кузнецов Сергей Иванович — кандидат технических наук, доцент кафедры общей физики Физико-технического института Национального исследовательского Томского политехнического университета;

Кулюкина Евгения Сергеевна — кандидат педагогических наук, доцент кафедры инженерной педагогики Института развития стратегического партнерства и компетенций Томского политехнического университета.

Рецензенты:

Шаповалов А. В. — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Томского государственного университета;

Парфенов А. Г. — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей информатики Томского государственного педагогического университета.

Склярова, Е. А.

С43 Физика. Механика : учеб. пособие для СПО / Е. А. Склярова, С. И. Кузнецов, Е. С. Кулюкина. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, **2019**. — 251 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-06863-4

В учебном пособии изложены все разделы курса физической механики. Даны разъяснения основных законов, явлений и понятий классической механики, релятивистской механики и рассмотрены основные положения общей теории относительности. Учитываются наиболее важные достижения в современной науке и технике, уделяется большое внимание физике различных природных явлений.

Цель пособия — помочь студентам освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи, связанные с повышением ресурсоэффективности. Пособие ориентировано на организацию самостоятельной работы студентов. В нем анализируется решение многих физических задач, приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Предназначено для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования.

УДК 53(075.32)
ББК 22.3я723

ISBN 978-5-534-06863-4

Как говорили в сказке Королева:
«Сначала казнь, а приговор потом».

Юрий Кукин. Песня канатоходца

ОГЛАВЛЕНИЕ

Посвящается моим любознательным студентам, которые подвигли меня к переизданию этой книги.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс физики в средних специальных и высших технических учебных заведениях охватывает все важнейшие разделы классической и современной физики. Выпускник технического университета обязан владеть одной из основных фундаментальных дисциплин — физикой, твердо усвоить принципы и подходы естественных наук, обеспечившие, особенно в последнее время, невиданный технический прогресс и резкое сокращение сроков между научными открытиями и их внедрением в жизнь.

Все это приводит к повышению требований, которые предъявляются к современному курсу физики. Эти требования находят свое выражение в обновлении материала по сравнению с традиционными курсами, в повышении научно-технического уровня и в использовании инновационных технологий.

Задача общей физики, не вдаваясь глубоко в подробности рассматриваемых теорий и не увлекаясь математикой, дать общее представление о физической картине мира, установить действующие в нем законы, изучить основные методы физических исследований и обозначить области применения этих законов и методов.

Цель книги — помочь студентам освоить материал программы, научиться активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи и приобрести уверенность в самостоятельной работе.

Учебное пособие включает одиннадцать тем и представляет систематическое изложение основ классической механики на макроскопическом уровне. Приведены элементы специальной и общей теории относительности, рассмотрена связь пространства-времени с телами, движущимися со скоростями, близкими к скорости света. При этом:

- содержание теоретического материала охватывает все темы раздела «Физическая механика», изучаемые в технических ссузах и вузах;
- учитываются наиболее важные достижения в развитии современной науки и техники;
- уделяется большое внимание физике различных явлений природы;
- анализируются решения большого количества физических задач, связанных с повышением ресурсоэффективности.
- приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

По способу представления изучаемого материала предлагаемый курс физики можно назвать двухуровневым. Главы и разделы, содержащие материал повышенной сложности, отмечены звездочкой (*). Студент, имеющий желание получить хорошую оценку на экзамене, должен освоить материал, как первого, так и второго уровня сложности.

Небольшой объем учебного пособия достигнут путем тщательного отбора и лаконичного изложения материала. Ввиду краткости курса устранены излишние разъяснения, повторения и промежуточные выкладки.

В пособии приведено большое количество рисунков, схем, графиков и гистограмм, способствующих лучшему восприятию прочитанного материала.

Пособие разработано в соответствии с действующей программой курса общей физики и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям и специальностям технических наук, техники и технологии.

Подготовлено на кафедре общей физики ТПУ и соответствует программе курса физики средних специальных и высших технических учебных заведений.

Предназначено для использования студентами технических специальностей, изучающими курс физики по очной и дистанционной программам образования в течение трех семестров.

В результате изучения пособия студент должен освоить: ***трудовые действия*** владения методами теоретического исследования физических явлений и процессов; ***необходимые умения*** решать типовые задачи по основным разделам механики; ***необходимые знания*** основных законов и принципов механики; сущности физических законов и смысл физических понятий и величин.

За помощь в подготовке пособия и целый ряд полезных советов автор благодарен профессорам кафедры общей физики ТПУ: Ю. И. Тюрину, И. П. Чернову, Ю. Ю. Крючкову; доцентам Л. И. Семкиной, Н. Д. Толмачевой, Э. В. Поздеевой. Особая признательность за редактирование пособия профессору В. А. Ларионову.

Наиболее полно материал курса изложен на сайте преподавателя http://portal.tpu.ru/SHARED/s/SMIT, в Web course tools ТПУ и в электронном читальном зале НТБ ТПУ http://www.lib.tpu.ru.

Надеюсь, что книга сможет послужить студентам разных специальностей, действительно интересующихся проблемами точного знания.

Автор с благодарностью примет все замечания и пожелания читателей, способствующие улучшению курса по адресу smit@tpu.ru.

Книга, господа, это множество нарезанных в четвертку листов бумаги, напечатанных и собранных вместе, переплетенных и склеенных клейстером. Да-с.

Ярослав Гашек.
«Похождения бравого солдата Швейка»

КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ КНИГОЙ

Порядок изложения в книге – систематический, но это не значит, что читатель обязан читать её подряд – страницу за страницей, главу за главой. Главы в значительной степени независимы одна от другой и представляют собой *самостоятельные дидактические единицы*. Часто начало раздела покажется легкодоступным, но потом дорога постепенно пойдет вверх, становясь круче в конце главы и в дополнениях к ней. Поэтому читатель, нуждающийся скорее в общей информации, чем в приобретении специальных знаний, поступит правильно, если удовлетворится таким отбором материала, который может быть осуществлен по принципу избегания более детализированных рассмотрений.

Студент с ограниченной математической подготовкой пусть выбирает по своему вкусу. Звездочками и мелким шрифтом отмечено то, что может быть опущено при первом чтении без серьезного ущерба для понимания последующего. Большой беды не будет, если при изучении книги читатель ограничится теми разделами или главами, которые представляют для него наибольший интерес.

Курсивом выделены основные определения и теоремы, которые необходимо запомнить. Жирным курсивом отмечены законы, новые термины и основные понятия, на которые необходимо обратить особое внимание. Для обозначения векторных величин на рисунках и в тексте используется прямой шрифт со стрелкой.

Материал курса подобран и структурирован таким образом, чтобы облегчить самостоятельную работу студентов. Лучшему усвоению материала способствуют:

- четкость и корректность определений и формулировок;
- большое количество рисунков, дающих возможность наглядно представить физическую сущность процесса;
- однотипность оформления задач;
- проведение сопоставительного анализа различных процессов в рамках единого естественнонаучного представления.

Каждый из разделов начинается с изложения теоретического материала. Подача некоторых вопросов отличается от принятого в учебниках, чтобы избежать излишних математических выкладок при выводе формул. После прочтения теории следует проверить понимание и запоминание определений основных физических понятий и величин, понимание физического смысла формулировок и законов. Для этого в книге приведено большое количество вопросов и упражнений. Изучение каждого раздела курса физики рекомендуется завершить решением задач.

В пособии рассмотрены примеры решения задач, после тщательной проработки которых можно приступать к самостоятельному решению задач. Все задачи, предлагаемые для самостоятельной работы, снабжены ответами, как в общем виде, так и в числовом.

Многие задачи предназначены, по существу, для углубления основного материала и даже порой частично заменяют длинные количественные выводы, не приводившиеся в тексте главы.

Большинство вопросов и задач не носит чисто формального характера; более трудные отмечены звездочкой. Не надо слишком огорчаться, если вы не сумеете выполнить некоторые из них. Дополнительное собрание задач могло бы облегчить использование пособия при самоподготовке и на практических занятиях.

Примеры решений не имеют цели научить решению задач: научить нельзя – можно только научиться. Но для этого существует единственный путь – самостоятельное решение большого числа задач. Примеры решения типовых задач выполняют другую роль: они показывают последовательность физических рассуждений, применимость того или иного физического закона к данной задаче. Решение задач приводится в общем виде. Вычисления и проверка единиц измерений ради экономии места в ряде примеров опускаются.

Для удобства работы с данным пособием в приложении приведены фундаментальные физические константы, таблицы физических величин, некоторые справочные данные и сведения о размерностях физических величин. Более точные значения физических постоянных и таблицы физических величин приведены в справочнике «Фундаментальные константы. Таблицы физических величин», размещенном в электронном читальном зале НТБ ТПУ http://www.lib.tpu.ru/fulltext2/m/2010/m99.pdf.

Для настоящего курса физики реализовано его мультимедийное сопровождение и создан электронный учебник, размещенный на сайте преподавателя, Web course tools ТПУ и в электронном читальном зале НТБ ТПУ http://www.lib.tpu.ru.

Заставить человека думать – это значит сделать для него значительно больше, чем снабдить его определенным количеством инструкций.

Чарльз Бэббидж

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Внимательно прочитайте условия задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в интернациональной системе единиц (СИ).

СИ состоит из *основных*, *дополнительных* и *производных* единиц. *Основными единицами* являются: единица *длины* – метр (м); *массы* – килограммы (кг); *времени* – секунда (с); *силы электрического тока* – ампер (А); *термодинамической температуры* – кельвин (К); *количества вещества* – моль (моль); *силы света* – кандела (кд).

Дополнительные единицы: единица плоского угла – радиан (рад); *единица телесного угла* – стерадиан (ср).

Производные единицы устанавливаются через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими величинами.

В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц (см. Приложение).

2. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие абстракции, как материальная точка, абсолютно твердое тело, луч света.
3. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж.
4. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, то есть составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.
5. Найдите решение полученной системы уравнений в виде алгоритма, отвечающего на вопрос задачи.
6. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей.
7. Подставьте в полученную формулу численные значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.

Удачные обозначения обладают утонченностью и будят мысль, порой делая ее, кажется, почти так же, как искусный учитель.

Бертран Рассел

ОБОЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В КНИГЕ

Основные физические величины			
Длина	l, м	Сила света	J, кд
Масса	m, кг	Сила электрического тока	I, А
Время	t, с	Количество вещества	ν, моль
Термодинамическая температура	T, К		
Дополнительные физические величины			
Плоский угол	α, φ, рад	Телесный угол	Ω, ср
Производные физические величины			
Давление	P, Па	Скорость	υ, м·с$^{-1}$
Импульс	p, кг·м·с$^{-1}$	Скорость угловая	ω, рад·с$^{-1}$
Коэффициент жесткости	k, Н·м$^{-1}$	Скорость центра инерции	υ_0, м·с$^{-1}$
Коэффициент трения	μ	Ускорение	a, м·с$^{-2}$
Модуль Юнга	E, Па	Ускорение нормальное	a_n, м·с$^{-2}$
Момент импульса	L, кг·м^2·с$^{-1}$	Ускорение свободного падения	g, м·с$^{-2}$
Момент инерции	J, кг·м^2	Ускорение тангенциальное	a_τ, м·с$^{-2}$
Момент силы	M, Н·м	Ускорение угловое	ε, рад·с$^{-2}$
Мощность	N, Вт	Частота	ν, Гц
Напряжение упругое	σ, Па	Частота круговая	ω, с$^{-1}$
Период колебаний	T, с	Энергия кинетическая	E_k, Дж
Плотность	ρ, кг·м$^{-3}$	Энергия покоя	E_0, Дж
Площадь	S, м^2	Энергия полная	E, Дж
Работа	A, Дж	Энергия потенциальная	$E_п$, Дж
Сила	F, Н	Энергия удельная	w, Дж·м$^{-3}$

Греческий алфавит

Α α – альфа	Η η – эта	Ν ν – ню	Τ τ – тау
Β β – бета	Θ θ – тэта	Ξ ξ – кси	Υ υ – ипсилон
Γ γ – гамма	Ι ι – йота	Ο ο – омикрон	Φ φ – фи
Δ δ – дельта	Κ κ – каппа	Π π – пи	Χ χ – хи
Ε ε – эпсилон	Λ λ – ламбда	Ρ ρ – ро	Ψ ψ – пси
Ζ ζ – дзета	Μ μ – мю	Σ σ – сигма	Ω ω – омега

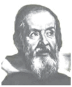
Дорога к мудрости проста,
найди её без толстых книжек:
мимо, и мимо, и мимо опять,
но ближе, и ближе, и ближе.
Пит Хайн. Груки

ВВЕДЕНИЕ

***Физика** – это наука о природе* (от греч. *physis* – природа).

Физика – одна из самых совершенных и глубоких современных наук, являющаяся источником знаний и наиболее достоверных представлений об окружающем нас мире, составляющих базу для дальнейшего освоения конкретных разделов науки и техники. В основании современной естественнонаучной картины мира лежат физические законы, принципы и концепции. Физика отражает основные этапы сложного исторического пути познания физической природы вещей, способствует формированию целостного взгляда на окружающий мир.

Первые научные представления возникли ещё очень давно, по-видимому, на самых ранних этапах истории человечества, и были отражены в письменных источниках. Однако считается, что физика, как наука, в своём современном виде берёт начало со времен Галилео Галилея, это XV век. Действительно, Галилей и великий английский ученый Исаак Ньютон в XVI веке совершили целую революцию в научном познании.



Галилей Галилео (1564–1642) – выдающийся итальянский физик и астроном, один из основателей точного естествознания. Оказал значительное влияние на развитие научной мысли. Именно от него берет начало физика как наука. Галилею человечество обязано двумя принципами механики. Это известный галилеевский принцип относительности для равномерного и прямолинейного движения и принцип постоянства силы тяжести.

Ньютон Исаак (1643–1727) – выдающийся английский ученый, заложивший основы современного естествознания, создатель классической физики. Работы относятся к механике, оптике, астрономии, математике. Сформулировал основные законы классической механики, открыл закон всемирного тяготения, дисперсию света, развил корпускулярную теорию света, разработал дифференциальное и интегральное исчисление.

Физика, которая успешно развивалась в течение трех столетий, достигла своей кульминации во второй половине XIX века созданием электромагнитной теории света, и называется *классической физикой*. Тогда, на рубеже XIX–XX вв., казалось, что достигнуто полное понимание физического мира. Однако уже в самом начале XX века новые эксперименты и новые идеи в физике стали указывать на то, что некоторые законы классической физики неприменимы к крошечному миру атома, а также к объектам, движущимся с высокими скоростями. Следствием всего этого явилась очередная великая революция в физике, которая привела нас к тому, что мы называем *современная физика*.

Важнейшая задача курса физики – формирование у студентов представлений о современной физической картине мира.

В последние десятилетия мир переживает невиданный по своим масштабам научно-технический прогресс, который базируется на фундаментальных физических исследованиях. Достижение нового теоретического и экспериментального понимания физических процессов и явлений послужит основой создания новейших технических решений, технологий, приборов и устройств.

Наряду с колоссальными достижениями физической науки, во всех её разделах остается масса нерешенных проблем, разработка которых позволит человечеству достигнуть принципиально нового уровня развития земной цивилизации.

Совершенно очевидно, что быстро ориентироваться и успешно работать в современном мире могут только те выпускники вузов, которые получили в процессе обучения достаточно широкую и глубокую фундаментальную подготовку и навыки самостоятельной исследовательской работы.

Все, что видим мы, –
Видимость только одна.
Далеко от поверхности мира
До дна!

Омар Хайям

ГЛАВА 1. ПРЕДМЕТ ФИЗИКИ И ЕЁ СВЯЗЬ С ДРУГИМИ НАУКАМИ

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы её движения. В этой главе мы познакомимся с основными методами исследования в физике, рассмотрим связь физики с другими науками и оценим масштабы пространства, времени и скоростей.

1.1. Предмет физики

Главная цель любой науки, в т. ч. и ***физики***, рассматривается обычно как приведение в систему представлений о сложных явлениях, регистрируемых нашими органами чувств, т. е. упорядочение того, что мы называем *«окружающим нас миром»*.

Окружающий нас мир, все существующее вокруг нас и обнаруживаемое нами посредством ощущений, представляет собой материю. ***Материя – это объективная реальность, данная нам в ощущениях.***

Неотъемлемым свойством материи и формой её существования является ***движение*** *– это, в широком смысле слова, всевозможные изменения материи – от простого перемещения до сложнейших процессов мышления.*

Дать строгое определение предмета физики довольно сложно, потому что границы между физикой и рядом смежных дисциплин условные.

Академик А.Ф. Иоффе[*], российский физик, определил *физику как науку, изучающую общие свойства и законы движения вещества и поля*. В настоящее время общепринято, что все взаимодействия осуществляются посредством ***полей*** (например: гравитационных, электромагнитных, полей ядерных сил).

Поле, *наряду с веществом, является одной из форм существования материи.* Неразрывная связь поля и вещества, а также различие в их свойствах будут рассмотрены нами по мере изучения курса физики.

---

[*] Иоффе Абрам Федорович (1880–1960) – российский и советский физик. Здесь и далее краткую информацию об учёных см. в Персоналиях.

1.2. Теория и эксперимент в физике

В курсе физики мы часто будем использовать понятия: ***эксперимент***, ***гипотеза***, ***теория***, ***модель***, ***закон***.

Каждая наука определяется не только предметом изучения, но и специфическими методами, которые она применяет. Основным методом исследования в физике является ***опыт*** – *наблюдение исследуемых явлений в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явлений, многократно воспроизводить его при повторении этих условий.*

Наиболее широко в науке используется ***индуктивный метод***, *заключающийся в накоплении* **фактов** *и последующем их обобщении для выявления общей закономерности* – ***гипотезы***. На следующем этапе познания ставят специальные эксперименты для проверки гипотезы. Если результаты эксперимента не противоречат гипотезе, то последняя получает статус ***теории***.

Однако научное познание нельзя представлять в виде механического процесса накопления фактов и осмысления теорий – это творческий процесс.

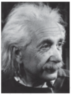
Теории никогда не выводят непосредственно из наблюдений, напротив, их создают для объяснения полученных из опыта фактов в результате осмысления этих фактов разумом человека. Например, к атомистической теории, согласно которой вещество состоит из атомов, ученые пришли вовсе не потому, что кто-либо реально наблюдал атомы (в XVIII веке это не удавалось никому). Представление об этом было создано творческим разумом человека. Аналогичным образом возникли и такие фундаментальные теории, как специальная теория относительности (СТО), электромагнитная теория света и закон всемирного тяготения Ньютона.

Великие научные теории, как творческие достижения, можно сравнить с великими творениями литературы и искусства. Однако наука всё же существенно отличается от других видов творческой деятельности человека, и основное отличие состоит в том, что наука требует проверки своих понятий или теорий – её предсказания должны подтверждаться ***экспериментом.*** Действительно, *тщательно поставленные эксперименты представляют собой важнейшую задачу физики.*

История свидетельствует о том, что созданные теории, отслужив свой срок, сдаются в архив, а им на смену приходят новые теории.

В некоторых случаях новая теория принимается учеными потому, что её предсказания согласуются количественно с экспериментом лучше, чем прежняя теория. Во многих случаях новую теорию принимают, когда, по сравнению с прежней теорией, она позволяет объяснить более широкий *класс явлений.* Например, построенная Коперником[2] теория Вселенной с центром на Солнце не описывала движение небесных тел более точно, чем построенная ранее Птолемеем теория Вселенной с центром на Земле. Однако теория Коперника содержит некоторые новые важные следствия. В частности, с её помощью становилось возможным определение порядка расположения планет Солнечной системы и расстояний до них; для Венеры были предсказаны фазы, аналогичные лунным.

Весьма важным в любой теории является то, насколько точно она позволяет получить количественные данные. Например, СТО Эйнштейна почти во всех обыденных ситуациях дает предсказания, которые крайне слабо отличаются от предшествующих теорий Галилея и Ньютона, но она приводит к *более точным результатам в предельном случае высоких скоростей,* близких к скорости света.



Эйнштейн Альберт (1879–1955) – выдающийся физик-теоретик, один из основателей современной физики, создатель специальной и общей теории относительности, коренным образом изменивших представления о пространстве, времени и материи. Исходя из своей теории открыл в 1905 г. закон взаимосвязи массы и энергии.

Под влиянием СТО Эйнштейна существенно изменилось наше представление о пространстве и времени. Более того, мы пришли к пониманию взаимосвязи массы и энергии (на основе знаменитого соотношения $E = mc^2$). Таким образом, теория относительности резко изменила наши взгляды на природу физического мира.

Пытаясь понять и объяснить определенный класс явлений, ученые часто прибегают к использованию ***модели***. При этом под ***моделью*** *понимают некоторый мысленный образ явления, опирающийся на уже известные понятия и позволяющий построить полезную аналогию.*

Примером может служить волновая модель света. Световые волны нельзя наблюдать подобно тому, как мы видим волны на воде, однако результаты опытов со светом указывают на его большое сходство с волнами на воде. Другой пример – модель атома, которую много раз строили и усовершенствовали.

Модельное представление всегда строится на основе какого-либо ***закона***. ***Законом*** *называют некоторые краткие, но достаточно общие утверждения относительно характера явлений природы* (таково, например, утверждение о сохранении импульса). Иногда подобные утверждения принимают форму определенных соотношений между величинами, описывающими явления, например *закон всемирного тяготения* Ньютона, согласно которому

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{1.2.1}$$

Для того чтобы называться законом, утверждение должно выдержать экспериментальную проверку *в широком классе наблюдаемых явлений*. То есть закон представляет объединяющее начало для многих наблюдений. Это ведущий принцип, который высвечивает закономерности явлений природы.

Таков путь развития знания. Однако известны случаи, когда путь открытия был противоположным описанному. Это так называемый ***дедуктивный метод***, *когда на основе общих закономерностей выделяются частные явления*. Так, на основе закона всемирного тяготения, Леверрье[3] в 1848 г. открыл планету Нептун, а Томбо[4] в 1930 г. – Плутон.

1.3. Физика и другие науки

Ричард Фейнман[5], читая свои знаменитые лекции по физике, говорил: *«Физика – это самая фундаментальная из всех наук, самая всеобъемлющая; огромным было её влияние на всё развитие науки. Действительно, ведь нынешняя физика вполне равноценна давнишней натуральной философии, из которой возникло большинство современных наук. Не зря физику вынуждены изучать студенты всевозможных специальностей; во множестве явлений она играет основную роль»*.

Химия (***неорганическая***) испытывает на себе влияние физики более чем любая другая наука. Все химические процессы – это образование или разрушение связи между валентными электронами. В сущности, теоретическая химия – это физика.

Астрономия старше физики, но как наука астрономия встала на ноги только тогда, когда физики смогли объяснить, почему планеты и звезды движутся именно так, а не иначе. Самым поразительным открытием астрономии был тот факт, что звезды состоят из тех же атомов, что и Земля. Доказано это было физиками-спектроскопистами. Откуда звезды черпают свою энергию? Ясно это стало только к 1940 г., после открытия физиками реакции деления и термоядерного синтеза.

Астрономия столь близка к физике, что трудно провести грань между ними.

Биология. Механизм всех биологических процессов можно понять только на молекулярном и внутриклеточном уровне. И здесь биологам не обойтись без знания физики и без физической аппаратуры, например электронных микроскопов, с помощью которых была открыта структура ДНК. А сложнейшие процессы нервной деятельности? По сути это электромагнитные явления.

Здесь взяты примеры из областей науки, казалось бы, далеких от физики. А все предметы, которые изучаются в техническом университете (кроме истории, иностранных языков и т. д.), являются частными случаями различных разделов физики.

Например, ***электротехника*** началась с чисто физических исследований Эрстеда[6], Ампера[7], Фарадея[8], Максвелла[9]. ***Электроника*** – это синтез нескольких разделов физики: электромагнетизма, физики твердого тела, физики вакуума и газов и т. д. И даже королева наук – ***математика*** – является инструментом для физических исследований.

Лазеры – физика вынужденного излучения атомов и молекул.

Голография – техническое использование явления интерференции и дифракции электромагнитных волн.

Связь между ***физикой*** и ***горно-геологическими науками*** неоспорима. Нельзя объяснить никакой геологический процесс, не опираясь на физические законы, описывающие элементарные составляющие этого процесса.

Для иллюстрации перечислим часть из большого числа глобальных проблем геологии, теснейшим образом связанных с физикой:

- происхождение Земли и других планет;
- строение и состав различных геосферных оболочек;
- возраст Земли и датирование этапов её развития;
- термическая история Земли;
- разработка теории разрушения горных пород;
- прогноз геодинамических процессов (землетрясения, горные удары, внезапные выбросы газов и др.).

В результате связи физики и геологии обособились граничные области знаний: геофизика, петрофизика, физика земной коры, физика атмосферы, физика пласта, физика океанов и др.

Есть надежда, что таким коротким экскурсом в проблемы связи физики с другими науками автору удалось поколебать бытующее среди студентов мнение, что физика им совершенно ни к чему.

Итак, физика в полном объеме важна и нужна для любого специалиста, но мы не ставим цели изучить все проявления физических законов в различных областях. Вы с ними встретитесь, изучая специальные предметы. Наша задача – изучить *основные законы физики*.

1.4. Пространственно-временные отношения

Механика – *наука о простом перемещении тел в пространстве и во времени*. Согласно основным положениям материалистического учения, окружающий нас мир состоит из различных видов материи, которая движется в пространстве и изменяется с течением времени. Другими словами, пространство и время есть формы существования материи, неотделимые от самой материи.

Трудно дать краткое, общее и строгое определение понятиям пространства и времени. Можно сказать, что пространство есть совокупность протяженных тел, а время – совокупность часов, расположенных в различных частях пространства и отсчитывающих длительности временных интервалов. Протяженность тел характеризуется длиной l, а длительность протекающих процессов – временем t.

Движение, понимаемое в широком смысле, является неотъемлемым всеобщим свойством материи. Простейшей формой движения является механическое движение, или перемещение.

Основными понятиями классической механики являются *абсолютное пространство* и *абсолютное время*.

Основными свойствами абсолютного пространства являются однородность и изотропность, т. е. все точки абсолютного пространства и все направления в нем равноценны. Абсолютное время по определению протекает равномерно, не зависит от свойств материи и места в пространстве. Оно однородно, но не изотропно, т. е. его мгновения равноценны, но из двух мгновений одно было раньше другого.

Пространство – это форма сосуществования материальных объектов и процессов, характеризующих структурность и протяженность материальных систем.

Время – это форма последовательной смены явлений и состояний материи, которая характеризует длительность их бытия. Пространство и время не существуют в отрыве от материи.

Масштабы пространства, времени и скоростей перемещения могут изменяться в очень широких пределах (рис. 1.1).

***Масштабы пространства*:**

- пространство Вселенной, доступное для наблюдения посредством современных методов, достигает 10^{26} м;
- размеры ядер имеют порядок 10^{-15} м;
- на мощных ускорителях исследуется структура частиц до расстояний 10^{-18} м.

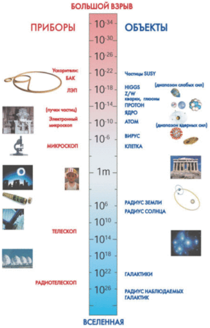


Рис. 1.1. Пределы изменения пространства

***Масштабы времени*:**

- время существования Вселенной оценивается в 10^{18} с;
- современные методы дают возможность измерять время жизни нестабильных частиц до 10^{-11} с.

Скорость:

- естественным масштабом скоростей в природе служит скорость распространения электромагнитных волн в вакууме $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м·с$^{-1}$;
- скорость света в вакууме является предельно высокой скоростью любого материального объекта. Её называют универсальной (мировой) постоянной.

Если скорость движения объекта пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света, так что $(\upsilon/c)^2 \ll 1$, то движение является нерелятивистским. В противном случае – релятивистским.

Законы движения существенно отличаются, в зависимости от *пространственных масштабов* (макромир и микромир). Линейный размер атомов равен 10^{-10} м. Этот размер является одним из признаков перехода от макромира к микромиру. Он получил название ***Ангстрем***[10] (1 Å = 10^{-10} м).

Критерием применимости законов макро- или микромира является универсальная константа – ***постоянная Планка***[11],

$$\hbar = h/2\pi = 1{,}054 \cdot 10^{-34}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Движение макроскопических тел подчиняется законам классической механики – именно с этого раздела мы начнем с вами изучать физику. Движение микрочастиц подчиняется законам квантовой механики, качественно отличающимся от классических.

Другими словами, движение описывается классическими законами, если произведение массы тела m на скорость υ и на расстояние R значительно больше постоянной Планка,

$$m\upsilon R >> \hbar.$$

Пример 1. Электрон в атоме водорода имеет: массу $m = 10^{-30}$ кг, скорость $\upsilon = 10^2$ м$\cdot$с$^{-1}$, радиус орбиты $R = 10^{-10}$ м, тогда $m\upsilon R \approx 10^{-38} << \hbar$, т.е. здесь движение подчинено *квантовыми законами.*

Пример 2. Камень весом 1000 кг свалился с горы высотой 30 м со скоростью $5\ \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$, следовательно $m\upsilon R = 1{,}5 \cdot 10^5\ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1} >> \hbar$. В данном случае применяются *законы классической механики.*

Обобщая вышесказанное, следует отметить, что механика подразделяется на классическую и квантовую. В пределах каждой из них рассматривают релятивистское и нерелятивистское движение.

Квантовые и релятивистские представления имеют более общий характер, и законы классической и нерелятивистской механики вытекают из квантовых и релятивистских представлений при переходе соответствующих границ.

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить...
А.С. Пушкин

ГЛАВА 2. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Приводятся абстрактные понятия, отражающие реальные свойства тел. Описываются важнейшие системы координат. Излагаются сведения о векторах. Даётся определение основных физических величин кинематики точки.

2.1. Понятие механики. Модели в механике

Механика (от греч. *mechanike* – орудие, сооружение) – *часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.*

Механическое движение – *это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.*

Механика подразделяется на три части: *статику*, *кинематику* и *динамику*.

Кинематика (от греч. *kinema* – движение) – *раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.*

Динамика (от греч. *dynamis* – сила) изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обусловливают это движение.

Статика (от греч. *statike* – равновесие) изучает условия равновесия тел. Поскольку равновесие есть частный случай движения, законы статики являются естественным следствием законов динамики и в данном курсе не изучаются.

Без знаний механики невозможно представить себе развитие современного машиностроения. Развитие механики как науки начиналось с III в. до н. э., когда древнегреческий ученый Архимед[12] сформулировал закон рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем и окончательно сформулированы английским физиком И. Ньютоном.

Механика Галилея и Ньютона называется ***классической***, *т. к. она рассматривает движение макроскопических тел со скоростями, которые значительно меньше скорости света в вакууме.* Движение тел со скоростями, близкими к скорости света, рассматривает ***релятивистская механика***, другое её название – ***специальная теория относительности***. Рассмотрением движения элементарных частиц занимается ***квантовая механика***.

Для описания движения тел в зависимости от условий задачи используют различные *физические модели*. Чаще других используют понятия *абсолютно твердого тела и материальной точки*.

Движение тел происходит под действием сил. Под действием внешних сил тела могут деформироваться, т.е. изменять свои размеры и форму.

Тело, деформацией которого можно пренебречь в условиях данной задачи, называют ***абсолютно твердым телом*** (*хотя абсолютно твердых тел в природе не существует*).

Тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется ***материальной точкой.***

Можно ли данное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров тела, а от условия задачи (например, наше огромное Солнце тоже материальная точка в Солнечной системе).

2.2. Система отсчета, тело отсчета. Сведения о векторах

Всякое движение *относительно,* поэтому для описания движения необходимо условиться относительно какого другого тела будет отсчитываться перемещение данного тела. *Выбранное для этой цели тело называют* ***телом отсчета.***

Система отсчета *– совокупность системы координат и часов, связанных с телом, относительно которого изучается движение.*

Движения тела, как и материи, вообще не может быть вне времени и пространства. Материя, пространство и время неразрывно связаны между собой (нет пространства без материи и времени, и наоборот).

Для описания движения практически приходится связывать с телом отсчета *систему координат* (декартова (рис. 2.1), сферическая (рис. 2.2), цилиндрическая и др.).

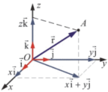


Рис. 2.1. Декартова система координат: положение точки A характеризуется координатами x, y, z или радиус-вектором $\vec{r}$

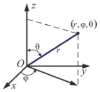


Рис. 2.2. Сферическая система координат: положение точки характеризуется длиной r, углами θ и φ

Пространство трехмерно, поэтому «естественной» системой координат является декартова, или прямоугольная, система координат, которой мы в основном и будем пользоваться.

В декартовой системе координат положение точки A в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами – x, y, z или радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат в данную точку.

Преобразования от сферических к декартовым координатам:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

Сведения о векторах

Векторными называются величины, характеризующиеся не только численным значением (модулем), но и направлением (в тексте векторы обозначают буквами прямого шрифта со стрелкой сверху, например $\vec{r}$).

На чертежах векторы, направленные к нам, обозначают точкой (·), а от нас – крестиком (×).

Радиус-вектором $\vec{r}$ *некоторой точки A называется вектор, проведенный из выбранного начала координат в данную точку* (рис. 2.1). Его проекции на координатные оси равны декартовым координатам данной точки: x, y, z. Умножив их на единичные векторы (орты) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, вектор $\vec{r}$ можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{2.2.1}$$

Слагаемые $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$ называются *компонентами*, или *составляющими* вектора $\vec{r}$; числа x, y, z – его координатами, а само соотношение (2.2.1) – формулой разложения вектора $\vec{r}$ по единичным ортам.

Модуль радиус-вектора, используя теорему Пифагора[13], можно выразить через координаты вектора $\vec{r}$:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.2.2}$$

Сложение векторов осуществляется по следующей схеме: начало каждого последующего вектора совмещают с концом предыдущего, результирующий вектор проводится из начала первого в конец последнего. Эта операция называется *правилом многоугольника*.

Умножение векторов производится на скалярную или векторную величину. Перемножение векторов может быть *скалярным* или *векторным*.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ дает скалярную величину c и вычисляется по формуле

$$c = \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = (\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha, \tag{2.2.3}$$

где $|\vec{d}|$ и $|\vec{b}|$ – модули перемножаемых векторов; α – угол между ними. При этом произведение $d\cos\alpha$ называется проекцией вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{b}$. Очевидно, что скалярное произведение векторов не зависит от того, в каком порядке они расположены: $\vec{d}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{d}$.

В частном случае, когда $\vec{d}=\vec{b}$, формула (2.2.3) дает $(\vec{b},\vec{b})=\vec{b}^2=b^2$.

Если векторы $\vec{d}$ и $\vec{b}$ ортогональны друг другу, то их скалярное произведение, согласно (2.2.3), равно нулю:

$$\vec{d}\cdot\vec{b}=0 \text{ при } \vec{d}\perp\vec{b}.$$

Векторным произведением векторов $\vec{d}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый формулой

$$\vec{c}=\vec{d}\times\vec{b}\equiv\left[\vec{d}\vec{b}\right]=\left(|\vec{d}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha\right)\cdot\vec{n}, \tag{2.2.4}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы-сомножители. Направление вектора $\vec{n}$, а также результирующего вектора $\vec{c}$ можно найти по *правилу правого винта*, или по *«правилу буравчика»*.

Модуль векторного произведения равен произведению модулей $\vec{d}$ и $\vec{b}$, умноженному на синус угла между ними:

$$\left|\left[\vec{d}\vec{b}\right]\right|=db\sin\alpha. \tag{2.2.5}$$

Вектор $\left[\vec{d}\vec{b}\right]$ равен по модулю вектору $\left[\vec{b}\vec{d}\right]$ и направлен в противоположную сторону:

$$\left[\vec{b}\vec{d}\right]=-\left[\vec{d}\vec{b}\right]. \tag{2.2.6}$$

Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю:

$$\left[\vec{d}\vec{b}\right]=0, \text{ если } \vec{d}\parallel\vec{b}. \tag{2.2.7}$$

Векторное произведение $\vec{d}$ и $\vec{b}$ можно записать с помощью определителя:

$$\left[\vec{d}\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ d_x & d_y & d_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}, \tag{2.2.8}$$

где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы, направленные по соответствующим осям.

2.3. Кинематика материальной точки

2.3.1. Путь, перемещение

Итак, положение точки A в пространстве задается с помощью радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки отсчета O, или начала координат (рис. 2.1). При движении материальной точки её координаты с течением времени изменяются.

В общем случае её движение определяется *скалярными уравнениями*:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \tag{2.3.1}$$

В соответствии с (2.2.4) эти уравнения эквивалентны *векторному уравнению*

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \tag{2.3.2}$$

Уравнения (2.3.1) и (2.3.2) называются ***кинематическими уравнениями движения материальной точки.***

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется ***числом степеней свободы.***

Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы (координаты x, y, z); если она движется на плоскости – две степени свободы; если вдоль линии – одну степень свободы.

При движении материальной точки A из положения *1* в положение *2* (рис. 2.3) её радиус-вектор изменяется и по величине, и по направлению, т. е. $\vec{r}$ зависит от времени t.

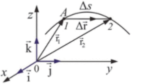


Рис. 2.3. Перемещение точки A в пространстве из положения 1 в положение 2: вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Геометрическое место точек концов $\vec{r}$ *называется* ***траекторией точки****. Длина траектории* есть ***путь*** Δs. Если точка движется по прямой, то приращение $|\Delta\vec{r}|$ равно пути Δs.

Пусть за время Δt точка A переместилась из точки *1* в точку *2*. ***Вектор перемещения*** $\Delta\vec{r}$ есть приращение $\vec{r}_1$ за время Δt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \text{ или}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}; \tag{2.3.3}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \tag{2.3.4}$$

2.3.2. Скорость

Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени Δt, за которое это перемещение произошло

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = <\vec{\upsilon}>. \tag{2.3.5}$$

Вектор $<\vec{\upsilon}>$ совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{r}$ (рис. 2.4).

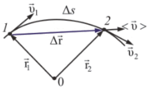


Рис. 2.4. Перемещение точки А в пространстве из положения 1 в 2 за время Δt

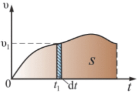


Рис. 2.5. Площадь под кривой υ(t) есть путь, пройденный телом, за время t

Средняя путевая скорость материальной точки:

$$<\upsilon> = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Мгновенная скорость $\vec{\upsilon}$ *– вектор скорости в данный момент времени, равный первой производной от* $\vec{r}$ *по времени и направленный по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки А*:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Подобное обозначение, введенное Г. Лейбницем[14], более удобно, особенно при вычислении производных от сложных функций.

Модуль вектора скорости:

$$\upsilon \equiv |\vec{\upsilon}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \tag{2.3.6}$$

При $dt \to 0$, т.е. на бесконечно малом участке траектории, $ds = dr$ (перемещение совпадает с траекторией). В этом случае *мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину – путь*:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Обратное действие – интегрирование (рис. 2.5).

$ds = \upsilon dt$ – площадь бесконечно узкого прямоугольника. Чтобы вычислить весь путь s за время t, надо сложить площади всех прямоугольников. В пределе перейдем к определенному интегралу:

$$s = \int_0^t \upsilon dt.$$

Геометрический смысл этого интеграла в том, что площадь под кривой $\upsilon(t)$ *есть путь тела за время t.*

При равномерном движении (с постоянной скоростью) $s = \upsilon t$.

Принцип независимости движения (принцип суперпозиции)

Рассмотрим простой опыт (рис. 2.6). Первый шарик участвует в двух движениях, второй – в одном, но т. к. вертикально вниз на оба шарика действует только одна сила – сила тяжести, то они упадут на пол одновременно.

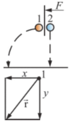


Рис. 2.6. Принцип независимости действия сил: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

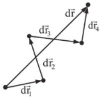


Рис. 2.7. Результирующее перемещение: $d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + d\vec{r}_3 + d\vec{r}_4$

Этот опыт доказывает *принцип независимости движения* (*действия сил*).

Если материальная точка участвует в нескольких движениях (рис. 2.7), то ее *результирующее перемещение* $d\vec{r}$ *равно векторной сумме перемещений*, обусловленных каждым из этих движений в отдельности.

В общем случае

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + ... + d\vec{r}_i + d\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} d\vec{r}_i,$$

но так как $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + ... + \vec{\upsilon}_i + \vec{\upsilon}_n$, или $\vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\upsilon}_i$.

Таким образом, *скорость тоже подчиняется принципу независимости движения.*

В физике существует общий принцип, который называется ***принципом суперпозиции (принцип наложения)*** – *допущение, согласно которому результирующий эффект сложного процесса взаимодействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности, при условии, что последние взаимно не влияют друг на друга.*

Принцип суперпозиции играет большую роль в теории колебаний, теории цепей и во многих других разделах физики и техники.

2.3.3. Проекция вектора скорости на оси координат

В векторной форме уравнения записываются легко и кратко. Но для практических вычислений нужно знать проекции вектора на оси координат выбранной системы отсчета. Положение точки A (рис. 2.8) задается радиус-вектором $\vec{r}$. Спроецируем вектор $\vec{r}$ на оси x, y, z.

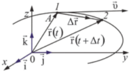


Рис. 2.8. Вектор перемещения точки A и её скорость $\vec{\upsilon}$

Понятно, что x, y, z зависят от времени t, т. е. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Зная зависимость этих координат от времени (закон движения точки), можно найти в каждый момент времени скорость точки.

Проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на оси x, y, z в обозначениях Лейбница:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$

Эти три равенства эквивалентны векторному равенству $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Согласно общей формуле (2.2.2) *модуль вектора скорости*

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_x + \upsilon^2{}_y + \upsilon^2{}_z}\,. \tag{2.3.7}$$

Так как скорость – величина векторная, то её можно представить с помощью единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

2.3.4. Ускорение и его составляющие

В произвольном случае движения скорость не остается постоянной. *Быстрота изменения скорости по времени и направлению характеризуется* ***ускорением***

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \tag{2.3.8}$$

Ускорение – величина векторная. При криволинейном движении $\vec{\upsilon}$ изменяется также и по направлению. В какую сторону? С какой скоростью? Выражение (2.3.8) на эти вопросы не отвечает.

Введем *единичный вектор* $\vec{\tau}$ (рис. 2.9), связанный с точкой *A* и направленный по касательной к траектории движения точки *A* (векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\upsilon}$ в точке *A* совпадают). Тогда можно записать:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau},$$

где $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ – модуль вектора скорости.

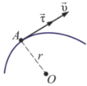


Рис. 2.9. К выводу тангенциальной составляющей ускорение: единичный вектор $\vec{\tau}$ направлен по касательной к траектории

Найдем ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (2.3.9)$$

Получаем два слагаемых ускорения: $\vec{a}_\tau$ – ***тангенциальное ускорение***, совпадающее с направлением $\vec{\upsilon}$ в данной точке, $\vec{a}_n$ – ***нормальное ускорение***, или ***центростремительное***, т. к. направлено оно к центру кривизны, перпендикулярно вектору $\vec{\tau}$.

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}, \text{ или, по модулю, } a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \qquad (2.3.10)$$

где $d\upsilon/dt$ – скорость изменения модуля вектора скорости $\vec{\upsilon}$.

Итак, $\vec{a}_\tau$ показывает изменение вектора скорости по величине:

- если $d\upsilon/dt > 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в ту же сторону, что и вектор $\vec{\upsilon}$, т. е. ускоренное движение;
- если $d\upsilon/dt < 0$, то $\vec{a}_\tau$ направлено в противоположную сторону $\vec{\upsilon}$, т. е. замедленное движение;
- при $d\upsilon/dt = 0$ $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{\upsilon} = \text{const}$ – движение с постоянной по модулю скоростью.

Рассмотрим подробнее второе слагаемое уравнения (2.3.9):

$$\vec{a}_n = \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Быстрота изменения направления касательной к траектории ($d\vec{\tau}/dt$) определяется скоростью движения точки по окружности и степенью искривленности траекторий (рис. 2.9, 2.10).

Степень искривленности плоской кривой характеризуется *кривизной С. Радиус кривизны r* – радиус такой окружности, которая сливается с кривой в данной точке на бесконечно малом ее участке d*s*.

Центры таких окружностей – центры кривизны т. *O* и *O*'.

$$r = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}. \qquad (2.3.11)$$

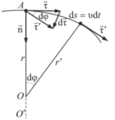


Рис. 2.10. К выводу нормальной составляющей ускорения, показывающей быстроту изменения направления касательной к траектории

Скорость изменения направления касательной можно выразить как произведение скорости изменения угла на единичный вектор, показывающий направление изменения угла:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n},$$

здесь $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный перпендикулярно касательной ($\vec{\tau}$) в данной точке, т. е. по радиусу к центру кривизны.

За время Δt материальная точка перемещается вдоль траектории на расстояние d*s* в пределе (при $\Delta t \to 0$), центры кривизны *O* и *O'* сливаются и угол поворота $\Delta\varphi$ равен элементарному углу dφ, который определяет поворот $d\vec{\tau}$.

Из (2.3.11) следует, что $d\varphi = ds/r$, но т. к. $ds = \upsilon dt$, то $d\varphi = \upsilon dt/r$.

Тогда $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\upsilon}{r}$, следовательно $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon}{r}\vec{n}$; наконец, $\upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}$, т. е.

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}.$$

Нормальное ускорение *показывает быстроту изменения направления вектора скорости.* Модуль нормального ускорения

$$|\vec{a}_n| \equiv a_n = \upsilon^2/r \qquad (2.3.12)$$

Центростремительным называют ускорение, когда движение происходит по окружности. А когда движение происходит по произвольной кривой, говорят, *нормальное ускорение,* перпендикулярное к касательной в любой точке траектории.

Итак, возвращаясь к выражению (2.3.9), можно записать, что *суммарный вектор ускорения* при движении точки вдоль плоской кривой равен:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}.$$

На рис. 2.11 изображено взаимное расположение векторов ускорения:

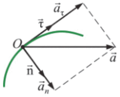


Рис. 2.11. Суммарное ускорение, нормальная и тангенциальная составляющие ускорения

Как видно из этого рисунка, модуль общего ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,. \qquad (2.3.13)$$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

- $a_\tau = 0$; $a_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение;
- $a_\tau = \mathrm{const}$; $a_n = 0$ – равноускоренное прямолинейное движение;
- $a_\tau = 0$; $a_n = \mathrm{const}$ – равномерное движение по окружности.

Прямая задача кинематики *сводится к определению кинематических характеристик по известному закону движения.*

При движении с постоянным ускорением (a = const)

$$s = \int at\mathrm{d}t = a\int t\mathrm{d}t = at^2/2.$$

Если $\upsilon = \upsilon_0 \pm at$ (a = const), то

$$S = S_0 + \upsilon_0 t \pm at^2/2. \qquad (2.3.14)$$

Обратная задача кинематики *заключается в нахождении закона движения по известной скорости (ускорению) и начальному кинематическому состоянию.*

Пусть нам известно ускорение точки в каждый момент времени.

По определению имеем $a(t)=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t}$, отсюда $\upsilon(t)=\upsilon(t_0)+\int\limits_{t_1}^{t_2}a(t)\mathrm{d}t$,

т. к. $\upsilon(t)=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, следовательно $r(t)=r(t_0)+\int\limits_{t_1}^{t_2}\upsilon(t)\mathrm{d}t$.

2.4. Кинематика твердого тела

2.4.1. Виды движения

Различают пять видов движения:

- *поступательное*;
- *вращательное – вокруг неподвижной оси*;
- *плоское*;
- *вокруг неподвижной точки*;
- *свободное.*

Поступательное движение *и вращательное* движение вокруг оси – основные виды движения твердого тела. Остальные виды движения твердого тела можно свести к одному из этих основных видов или к их совокупности.

Поступательное *– это такое движение, при котором любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе и все точки твердого тела совершают равные перемещения за одинаковое время* (рис. 2.12).

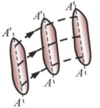


Рис. 2.12. Поступательное движение тела

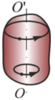


Рис. 2.13. Вращательное движение тела

При ***вращательном движении*** вокруг оси все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью ОО' вращения* (рис. 2.13). Из определения вращательного движения ясно, что понятие вращательного движения для материальной точки неприемлемо.

2.4.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела, при котором две его точки O и O′ остаются неподвижными, называется ***вращательным движением вокруг неподвижной оси****, а неподвижную прямую OO′ называют* ***осью вращения****.*

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси *OO′* (рис. 2.14).

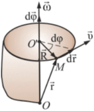


Рис. 2.14. Вращательное движение твердого тела вокруг оси OO′

Проследим за некоторой точкой *M* этого твердого тела. За время dt точка *M* совершает элементарное перемещение $d\vec{r}$.

При том же самом угле поворота $d\varphi$ другая точка, отстоящая от оси на большее или меньшее расстояние, совершает другое перемещение. Следовательно, ни само перемещение некоторой точки твердого тела, ни первая производная $\frac{dr}{dt}$, ни вторая производная $\frac{d^2r}{dt^2}$ не могут служить характеристикой движения всего твердого тела.

За это же время dt радиус-вектор $\vec{R}$, проведенный из точки *O′* в точку *M*, повернется на угол $d\varphi$. На такой же угол повернется радиус-вектор любой другой точки (т. к. тело абсолютно твердое, в противном случае расстояние между точками должно измениться).

Угол поворота $d\varphi$ характеризует *перемещение всего тела за время* dt.

Удобно ввести $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота тела, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения *OO′* так, чтобы, глядя вдоль вектора, мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора $d\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны «правилом буравчика»).

Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов:

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2.$$

Угловой скоростью *называется вектор* $\vec{\omega}$, *численно равный первой производной от угла поворота по времени и направленный вдоль оси вращения в направлении* $d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону):

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (2.4.1)$$

Если ω – const, то имеет место равномерное вращение тела вокруг неподвижной оси.

Пусть $\vec{\upsilon}$ – линейная скорость точки M. За промежуток времени dt точка M проходит путь $dr = \upsilon dt$. В то же время, $dr = Rd\varphi$ (центральный угол). Тогда можно получить связь линейной скорости и угловой:

$$\upsilon = \frac{dr}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = \omega R. \qquad (2.4.2)$$

В векторной форме $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$.

Вектор $\vec{\upsilon}$ ортогонален к векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ и направлен в ту же сторону, что и векторное произведение $[\vec{\omega}, \vec{R}]$.

Наряду с угловой скоростью вращения используют понятия периода и частоты вращения.

Период *T – промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот* (т. е. поворот на угол $\varphi = 2\pi$).

Частота *ν – число оборотов тела за* 1 *секунду.*

При вращении с угловой скоростью ω имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu; \; T = \frac{2\pi}{\omega}; \; \nu = \frac{1}{T}.$$

Введем вектор ***углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ для характеристики *неравномерного вращения тела*:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (2.4.3)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении $(d\omega/dt > 0)$, а $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении $(d\omega/dt < 0)$, рис. 2.15.

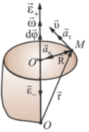


Рис. 2.15. Вращательное движение вокруг неподвижной оси OO'

Как и любая точка твердого тела, точка M имеет нормальную и тангенциальную составляющие ускорения. Выразим нормальное и тангенциальное ускорение точки M через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;$$

$$a_\tau = R\varepsilon; \tag{2.4.4}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R. \tag{2.4.5}$$

Обратите внимание. *Все кинематические параметры, характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота),* ***направлены вдоль оси вращения***.

Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

- *равномерное вращение:* $\varepsilon = 0$; $\omega = \text{const}$; $\varphi = \varphi_0 \pm \omega t$;
- *равнопеременное вращение:* $\varepsilon = \text{const}$; $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$; $\varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. На какие части подразделяется механика?
2. Что такое система отсчета? Тело отсчета?
3. Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
4. Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
5. Какое движение называется поступательным? Вращательным?
6. Дайте определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?
7. Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?
8. Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение? тангенциальное ускорение? Приведите примеры.
9. Дайте понятие кривизны траектории и радиуса кривизны.
10. В чем заключается обратная задача кинематики?
11. Перечислите пять видов движения твердого тела.
12. Что называется углом поворота? Что он характеризует?
13. Что называется угловой скоростью? угловым ускорением? Как определяются их направления?
14. Какова связь между линейными и угловыми кинематическими параметрами?
15. Что такое период и частота вращения?

16. Как направлены кинематические параметры, характеризующие вращательное движение?

17. Приведите формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси.

18. Изобразите твердое тело, вращающееся вокруг своей оси, и укажите его кинематические параметры.

19. По приведенному графику $a_x(t)$ (рис.1) постройте графики $\upsilon_x(t)$, $x(t)$ и $s(t)$ при следующих начальных условиях: $\upsilon(0) = 0$, $x(0) = 0$.

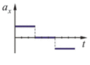


Рис. 1

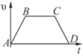


Рис. 2

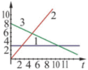


Рис. 3

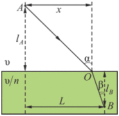
20. Используя график (рис. 2) зависимости скорости тела от времени, определите, каким видам движения соответствуют участки 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4.

21. Пользуясь приведенными на рис. 3 графиками зависимости скорости поступательного движения тел 1, 2 и 3 от времени, определите характер движения каждого тела и его ускорение.

22. Проведите аналогии между кинематическими величинами, используемыми для характеристики поступательного и вращательного движений.

Примеры решения задач

Задача 2.1. ***Принцип Ферма*** – постулат, сформулированный в 1662 г. П. Ферма, предписывающий лучу света двигаться из начальной точки в конечную по пути, *минимизирующему* время движения. Принцип Ферма справедлив не только для простейших примеров отражения и преломления света. С помощью этого принципа можно понять и точно рассчитать механическое движение.



Пункт A находится на асфальтированной площадке, пункт B – на примыкающем к нему земляном поле, на котором скорость машины в n раз меньше. Для того чтобы за кратчайшее время добраться из A в B, был выбран оптимальный маршрут, показанный на рисунке. Найти соотношение между синусами углов α и β.

Решение. Все расстояния указаны на рисунке. Время t_1, затрачиваемое на путь AO, равно: $t_1 = \dfrac{\sqrt{l_A^2 + x^2}}{\upsilon}$.

Время t_2, затрачиваемое на путь OB, преодолеваемый со скоростью υ/n, равно: $t_2 = \dfrac{n\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}}{\upsilon}$.

Полное время в пути $t = t_1 + t_2 = \dfrac{1}{\upsilon}\left(\sqrt{l_A^2 + x^2} + n\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}\right)$.

Поскольку точка O была выбрана так, что на путь затрачивалось минимальное время, должна быть равна нулю производная времени t по расстоянию x:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\upsilon}\left(\frac{x}{\sqrt{l_A^2 + x^2}} - n\frac{L-x}{\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}}\right) = 0.$$

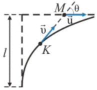
Т. к. $\dfrac{x}{\sqrt{l_A^2 + x^2}} = \sin\alpha, \dfrac{L-x}{\sqrt{l_B^2 + (L-x)^2}} = \sin\beta$, то $\sin\alpha - n\sin\beta = 0$, т. е.

$$\sin\alpha/\sin\beta = n.$$

Сходство с известным законом преломления света на границе двух сред не случайно: природа устроена так, что свет выбирает оптимальный путь.

Ответ: $\sin\alpha/\sin\beta = n$.

Задача 2.2*. ***Кошка и мышка.*** Кошка K преследует мышь M (см. рис.), бегущую по прямой линии с постоянной скоростью $u = \mathrm{const}$. Скорость кошки по модулю $\upsilon > |u|$ постоянна и направлена на мышь. В начальный момент скорости кошки и мыши перпендикулярны, а расстояние между ними l. Найти, через какое время кошка догонит мышь.



Решение. Обозначим r и θ расстояние между мышью и кошкой и угол между скоростью кошки и скоростью мыши (отсчитывается от направления скорости кошки). Записывая относительную скорость $\upsilon_{\text{отн}} = -\upsilon + u$ в полярной системе координат с началом в точке нахождения кошки, получаем

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\upsilon + u\cos\theta, \quad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -u\sin\theta.$$

Отсюда следует, что $\frac{dr}{dt}(u\cos\theta + \upsilon) - r\frac{d\theta}{dt}$ и $\sin\theta = u^2 - \upsilon^2$ или

$$\frac{d}{dt}\left[r(u\cos\theta + \upsilon)\right] = u^2 - \upsilon^2$$

Интегрируя обе части этого уравнения в пределах от 0 до t и учитывая, что $r(0) = l$, $\theta(0) = \pi/2$, получаем

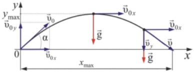
$$r(u\cos\theta + \upsilon) - \upsilon l = \left(u^2 - \upsilon^2\right) t.$$

Кошка догонит мышь тогда, когда $r = 0$, и, следовательно, затрачиваемое для этого время равно: $t = \frac{\upsilon l}{\left(\upsilon^2 - u^2\right)}$.

Ответ: $t = \frac{\upsilon l}{\left(\upsilon^2 - u^2\right)}$.

Задача 2.3. Рассмотреть движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Найти: уравнение траектории движения; время полета тела; время подъема на максимальную высоту; максимальную высоту подъема; максимальную дальность полета и угол подъема при этом.

Решение. При отсутствии сопротивления воздуха движение будет происходить по траектории, изображенной на рисунке.



Движение данного тела можно представить как результат наложения двух одновременных прямолинейных движений по осям Ox и Oy, направленных вдоль поверхности Земли и по нормали к ней.

По оси Ox движение равномерное с постоянной скоростью:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha\,.$$

Воспользовавшись формулой для равномерного прямолинейного движения, запишем уравнение движения тела вдоль оси Ox:

$$x = \upsilon_{0x} t = \upsilon_0 t \cos\alpha\,,$$

где t – время движения.

По оси Oy движение равнопеременное с ускорением $a_y = -g$ и с начальной скоростью

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha\,.$$

Для равномерного движения запишем:

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt = \upsilon_0 \sin\alpha - gt,$$

$$y = \upsilon_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключив время t из уравнений движения, найдем уравнение траектории:

$$y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Это уравнение ***параболы***.

В момент падения тела на Землю координата $y = 0$. Тогда найдем ***время полета***:

$$t\left(\upsilon_0 \sin\alpha - \frac{gt}{2}\right) = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = \left(\frac{2\upsilon_0}{g}\right)\sin\alpha.$$

Значение времени $t_1 = 0$ соответствует точке бросания тела. Таким образом, время полета тела

$$t_п = 2\upsilon_0 \sin\frac{\alpha}{g}.$$

При подъеме тела значение скорости υ_y уменьшится и при y_{max} превращается в ноль. Из уравнения $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$, при $\upsilon_y = 0$, находится ***время подъема*** тела на максимальную высоту:

$$0 = \upsilon_0 \sin\alpha - gt_{под},\ \text{отсюда}\ t_{под} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}.$$

Сопоставляя выражения, видим, что время подъема тела на высоту y_{max} равно времени спуска его с этой высоты.

Подставив время подъема t_{max} в формулу $y = \upsilon_{0y} t - gt^2/2 = \upsilon_0 t \sin\alpha - gt^2/2$, найдем ***максимальную высоту подъёма*** тела:

$$y_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Дальность полета x_{max} определяется, если в уравнения $x = \upsilon_{0x} t = \upsilon_0 t \cos\alpha$ вместо t подставить время полета:

$$x_{max} = \upsilon_0 t_п \cos\alpha = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

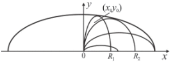
Дальность полета максимальна, когда значение sin2α максимально:

$$\sin 2\alpha_0 = 1,\ 2\alpha_0 = 90^\circ,\ \alpha_0 = 45^\circ.$$

Задача* 2.4. ***Парабола безопасности.*** Из начала координат под углом α к горизонтальной оси x бросают камень со скоростью u. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. При каком угле α_0 камень попадет в точку с координатами x_0, y_0 (см. рис.)?

Решение. Радиус-вектор камня в момент времени t дается формулой $r = ut + gt^2/2$, где g – вектор ускорения свободного падения, направленный вертикально вниз. Ориентируя ось y вверх, запишем уравнение в координатах: $x = ut\cos\alpha$, $y = ut\sin\alpha - gt^2/2$.

Исключив t, найдем уравнение траектории: $y = xtg\alpha - gx^2/\left(2u^2\cos^2\alpha\right)$.



Из этого уравнения, при $y = y_0$, $x = x_0$, находим

$$tg\alpha_0 = \left\{1 \pm \left[1 - \frac{2g}{u^2}\left(y_0 + \frac{gx_0^2}{2u^2}\right)\right]^{1/2}\right\}\frac{u^2}{gx_0}. \quad (1)$$

Действительно значения α_0, определяющие возможные траектории, получаются лишь при условии неотрицательности выражения под знаком квадратного корня, т. е. при условии

$$1 \geq \frac{2g}{u^2}\left(y_0 + \frac{gx_0^2}{2u^2}\right) \text{ или } y_0 \leq \frac{u^2}{2g}\left(1 - \frac{g^2x_0^2}{u^4}\right).$$

Таким образом, при начальной скорости u камнем могут быть достигнуты лишь точки, лежащие ниже точек параболы,

$$y = \frac{u^2}{2g}\left(1 - \frac{g^2x^2}{u^4}\right), \quad (2)$$

называемой ***параболой безопасности***.

Точки, лежащие вне ограничиваемой этой параболой области, не могут быть достигнуты.

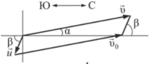
Достаточно обсудить лишь область $x_0 > 0$, $y_0 \geq 0$. Из (2) видно, что $u^2/(gx_0) \geq 0$. Это в сочетании с (1) означает, что по крайней мере одно значение α_0 больше или равно $\pi/4$. Точка на параболе безопасности может быть достигнута лишь при одном значении $\alpha_0 \geq \pi/4$, а точки ниже параболы безопасности – при двух значениях: α_{01} и α_{02}. Расстояния, на которых соответствующие траектории пересекут горизонтальную плоскость, равны $R_1 = u^2\sin 2\alpha_{01}/g$, $R_2 = u^2\sin 2\alpha_{02}/g$.

Задача 2.5. С какой скоростью и по какому курсу должен лететь самолет, чтобы за 2 часа пролететь точно на север 720 км, если во время полета дует постоянный северо-западный ветер под углом 30° к меридиану со скоростью 36 км/ч? Ответ представить в км/ч.

Дано:
$t = 2$ ч
$S = 720$ км/ч
$\beta = 30°$
$u = 36$ км/ч

υ – ? α – ?

Решение. Чтобы попасть в пункт назначения, самолету необходимо лететь под углом α к меридиану, отклоняясь на запад.



Обозначим искомую относительную скорость как $\vec{\upsilon}$, а результирующую абсолютную скорость, направленную вдоль меридиана, как $\vec{\upsilon}_0$. Её модуль $|\vec{\upsilon}_0| = S/t$. Из рисунка видно, что $\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon} + \vec{u}$. Модуль скорости $|\vec{\upsilon}|$ найдем из векторного треугольника скоростей, используя теорему косинусов:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + u^2 - 2\upsilon_0 u\cos(180 - \beta)},$$

$$[\upsilon] = \sqrt{\frac{\text{км}^2}{\text{ч}^2}} = \frac{\text{км}}{\text{ч}},\ \upsilon = 392 \text{ км/ч}.$$

Таким образом, скорость полета самолета больше υ_0.

Угол отклонения α от курса можно найти по теореме синусов:

$$\frac{u}{\sin\alpha} = \frac{\upsilon}{\sin(180° - \beta)},\ \alpha \approx 4{,}5°.$$

Ответ: $\upsilon = 392$ км/ч; $\alpha \approx 4{,}5°$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. Автомобиль движется равномерно и прямолинейно со скоростью 72 км/ч. Начиная с некоторого момента в течение 20 с он движется с ускорением, проходя за это время путь $s = 800$ м. Найдите ускорение a и расстояние Δl, пройденное автомобилем за последнюю секунду ускоренного движения.

Ответ: $a = \dfrac{2s - 2\upsilon_0 t}{t^2} = 2$ м/с; $\Delta s = \upsilon_0(t - t_1) + \dfrac{a}{2}(t^2 - t_1^2) = 59$ м.

Задача 2.2. Воздушный шар с пассажирами поднимается с ускорением 1 м/с^2. Через 10 с после начала движения один из пассажиров уронил небольшой предмет. Определите время падения предмета и значение его скорости в момент соприкосновения с Землей. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: $t = t_1 \dfrac{a \pm \sqrt{a(a+g)}}{g} = 4{,}37$ с; $\upsilon = -t_1\sqrt{a(a+g)} = -32{,}9$ м/с.

Задача 2.3. Определите угол α броска тела к горизонту, если оказалось, что максимальная высота подъема $h_{max} = s/4$, где s – дальность полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\alpha = 45°$.

Задача* 2.4. Мячик, брошенный горизонтально со скоростью $\upsilon = 10$ м/с с вершины наклонной плоскости, которая составляет с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Найти расстояние l до места падения мяча и угол β, который образует скорость мяча в момент падения с наклонной плоскости.

Ответ: $l = \dfrac{2\upsilon_0^2 \mathrm{tg}\alpha}{g}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = 28{,}8$ м; $\beta = \mathrm{arctg}(2\mathrm{tg}\alpha) - \alpha = 18{,}5°$.

Задача 2.5. Определите скорость капель дождя относительно Земли, если они оставляют на боковом стекле автомобиля следы под углом 60° к горизонту? Скорость по спидометру 90 км/ч, встречный ветер отсутствует.

Ответ: $\upsilon = \upsilon_a \mathrm{tg}\alpha = 43{,}3$ м/с.

Задача 2.6. Звук выстрела и пули одновременно достигают высоты 680 м. Какова начальная скорость пули, если скорость звука 340 м/с? Выстрел произведен вертикально вверх. Сопротивление воздуха движению пули не учитывать. Принять $g = 10$ м/с^2. Ответ представьте в единицах СИ.

Ответ: $\upsilon_0 = \dfrac{h}{t} + \dfrac{gt}{2} = 350$ м/с.

Задача 2.7. Шарик, брошенный вверх по наклонной плоскости, прошел последовательно два равных отрезка длиной 50 см каждый, и продолжал двигаться дальше. Первый отрезок шарик прошел за 1,5 с, второй – за 2,0 с. Найдите скорость шарика в конце второго отрезка. Ответ представьте в единицах СИ и округлите до десятых.

Ответ: $\upsilon_2 = \upsilon_0 - a(t_1 + t_2) = 0{,}2$ м/с.

Задача 2.8. Начальная скорость камня, брошенного под некоторым углом к горизонту, равна 10 м/с, а спустя время 0,5 с скорость камня равна 7 м/с. На какую максимальную высоту над начальным уровнем поднимется камень? Принять $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать. Ответ представьте в единицах СИ и округлите до десятых.

Ответ: $h_{max} = \dfrac{\upsilon_{0y}^2}{2g} = 2{,}9$ м.

Задача 2.9. Спортсмен прыгает с 10-метровой вышки и через 2 с погружается в воду на расстоянии 3 м (по горизонтали) от края вышки. Определите скорость спортсмена в момент прыжка. Принять $g = 10$ м/с^2. Ответ представьте в единицах СИ и округлите до десятых.

Ответ: $s = 5{,}2$ м.

Задача* 2.10. С вершины холма бросили камень под углом к горизонту со скоростью 10 м/с. В момент падения камня на склон холма угол между направлением скорости камня и горизонтом составил 60°, а разность высоты точек бросания и падения оказалась равной 5 м. Найдите угол между направлением начальной скорости камня и горизонтом. Принять $g = 10$ м/с^2. Ответ представьте в градусах и округлите до целого числа.

Ответ: $\alpha = 45°$.

Задача 2.11. Самолет летит по дуге окружности радиусом 1 км, сохраняя одну и ту же высоту 1,5 км. С интервалом времени 10,5 с с него сбрасывают два мешка. На каком расстоянии друг от друга эти мешки упадут на Землю, если скорость самолета 100 м/с? Принять $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ представьте в км и округлите до целого числа.

Ответ: $\Delta l = 2$ км.

Задача 2.12. Моторная лодка, проходя под мостом, обогнала плот. Через 45 минут, пройдя расстояние 15 км, она повернула обратно. В 6 км от моста лодка поравнялась с плотом. Найдите скорость течения и скорость моторной лодки относительно воды. Ответ представьте в км/ч и округлите до целого числа.

Ответ: $\upsilon_р = 4$ км/с, $\upsilon_л = 16$ км/с.

Задача 2.13. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно – вертикально вверх, другое – под углом 60° к горизонту. Начальная скорость каждого тела 25 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите расстояние между телами через 1,7 с. Принять $g = 10$ м/с^2. Ответ представьте в единицах СИ и округлите до десятых.

Ответ: $l = 22$ м.

Задача 2.14. Найти линейную скорость υ и центростремительное ускорение a точек на поверхности земного шара: а) на экваторе, б) на широте $\varphi = 60°$. Радиус земли принять равным $R = 6400$ км.

Ответ: а.) $\upsilon_0 = \dfrac{2\pi R}{T} = 465$ м/с; $a_0 = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} = 0{,}034$ м/с^2;

б.) $\upsilon_\varphi = \dfrac{2\pi R\cos\varphi}{T} = 233$ м/с; $a_\varphi = \dfrac{4\pi^2 R\cos\varphi}{T^2} = 0{,}017$ м/с^2.

Задача* 2.15. Муравей бежит из муравейника по прямой так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке A на расстоянии $l_1 = 1$ м от центра муравейника, его скорость $\upsilon_1 = 2$ см/с. За какое время t муравей добежит от точки A до точки B, которая находится на расстоянии $l_2 = 2$ м от центра муравейника? Ответ представьте в единицах СИ и округлите до целого числа.

Ответ: $t = 75$ с.

Задача* 2.16. Некоторое тело последовательно совершило два перемещения со скоростями υ_1 и υ_2. Первое перемещение направлено под углом φ_1 к некоторому выбранному направлению, второе – под углом φ_2. Известно также, что модуль первого перемещения в n раз меньше модуля второго. Определите среднюю скорость изменения модуля перемещения.

Ответ: $\upsilon_{ср} = \dfrac{\sqrt{1 + n^2 + 2n\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\,\upsilon_1}{1 + n\upsilon_1/\upsilon_2}$.

Задача 2.17. Первую половину пути тело двигалось со скоростью $\upsilon_1 = 2$ м/с, вторую – со скоростью $\upsilon_2 = 8$ м/с. Определить среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$.

Ответ: $\langle\upsilon\rangle = 2\,\upsilon_1\upsilon_2/(\upsilon_1 + \upsilon_2) = 3{,}2$ м/с.

Задача 2.18. Тело прошло первую половину пути за время $t_1 = 2$ с, вторую – за время $t_2 = 8$ с. Определить среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ тела, если длина пути $s = 20$ м.

Ответ: $\langle\upsilon\rangle = s/(t_1 + t_2) = 2$ м/с.

Задача 2.19. С какой высоты H упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за время $t = 0{,}1$ с?

Ответ: $H = (2s + gt^2)^2/(8gt^2) = 5{,}61$ м, где $s = 1$ м.

Опираться можно только на то,
что оказывает сопротивление.
Стендаль

ГЛАВА 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Основной смысл динамики Ньютона состоит в том, что именно ускорение, а не скорость обусловливается внешними условиями, описываемыми посредством понятия силы. Рассматриваются законы Ньютона, обсуждаются уравнения динамики поступательного движения произвольной системы тел.

3.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы

В основе так называемой классической, или ньютоновской, механики лежат три закона динамики, сформулированных И. Ньютоном в 1687 г. Эти законы играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта.

Законы Ньютона рассматривают как *систему взаимосвязанных законов* и опытной проверке подвергают не каждый отдельный закон, а всю систему в целом. Ньютоновская механика оказалась настолько плодотворной, настолько могущественной, что у физиков сложилось представление о том, что любое физическое явление можно объяснить с помощью ньютоновских законов. Большинство физиков к концу XIX в. были убеждены в том, что они уже знают о природе всё, что можно было узнать. Однако наиболее проницательные физики понимали, что в здании классической физики есть слабые места. Так, например, английский физик У. Томсон[19] (он же лорд Кельвин) говорил, что на горизонте безоблачного неба классической физики имеются два тёмных облачка: неудачи попыток создания теории абсолютно чёрного тела и противоречивое поведение эфира – гипотетической среды, в которой предполагалось распространение световых волн. Эти факты получили своё объяснение в новых теориях – специальной теории относительности и квантовой механике.

В специальной теории относительности, созданной А. Эйнштейном в 1905 г., подверглись радикальному пересмотру ньютоновские представления о пространстве и времени. Этот пересмотр привёл к созданию «механики больших скоростей», или, как её называют, *релятивистской механики*. Новая механика не привела, однако, к полному отрицанию старой ньютоновской механики. Уравнения релятивистской механики, в пределе (для скоростей малых, по сравнению со скоростью света), переходят в уравнения классической механики. Таким образом, классическая механика вошла в релятивистскую механику как её частный случай и сохранила своё прежнее значение для описания движений, происходящих со скоростями значительно меньшими, чем скорость света.

Аналогично обстоит дело и с соотношениями в классической и квантовой механике, возникшей в 20-х годах прошлого века в результате развития физики атома.

Уравнения квантовой механики также дают в пределе (для масс больших, по сравнению с массами атомов) уравнения классической механики. Следовательно, классическая механика вошла в квантовую механику в качестве её предельного случая.

Таким образом, развитие науки не перечеркнуло классическую механику, а лишь показало её ограниченную применимость. Классическая механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

Первый закон Ньютона: *всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её (его) изменить это состояние.*

Оба названных состояния схожи тем, что ускорение тела равно нулю. Поэтому формулировке первого закона можно придать следующий вид: *скорость любого тела остаётся постоянной (в частности, равной нулю), пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет её изменения. Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется* ***инертностью***. Поэтому первый закон Ньютона называют *законом инерции*.

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчёта. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчёта, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются *инерциальными системами отсчёта*.

Инерциальной системой отсчёта *является такая система отсчёта, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно (т. е. с постоянной скоростью).*

Таким образом, *первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчёта.*

Опытным путём установлено, что инерциальной системой отсчёта можно считать гелиоцентрическую (звёздную) систему отсчёта (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определённых звёзд). Система отсчёта, связанная с Землёй, строго говоря, неинерциальная, однако эффекты, обусловленные её неинерциальностью

(Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач малы, и в этих случаях её можно считать инерциальной.

Из приведённых выше примеров легко понять, что *основным признаком инерциальной системы является отсутствие ускорения.*

Сущность первого закона Ньютона может быть сведена к трём основным положениям:

- *все тела обладают свойствами инерции*;
- *существуют инерциальные системы отсчёта, в которых выполняется первый закон Ньютона*;
- *движение относительно. Если тело A движется относительно тела отсчета B со скоростью* υ, *то и тело B, в свою очередь, движется относительно тела A с той же скоростью, но в обратном направлении*: $\upsilon = -\upsilon'$.

3.2. Масса и импульс тела

Воздействие на данное тело со стороны других тел вызывает изменение его скорости, т. е. сообщает данному телу ускорение.

Опыт показывает, что одинаковое воздействие сообщает различным телам разные по величине ускорения. *Всякое тело противится попыткам изменить его состояние движения.* Это свойство тел, как мы уже говорили, называется *инертностью* (следует из первого закона Ньютона).

Мерой инертности тела *является величина*, *называемая* ***массой***.

Чтобы определить *массу* некоторого тела, нужно сравнить её с массой тела, принятого за *эталон массы* (или сравнить с телом уже известной массы).

Масса – величина ***аддитивная*** (*масса тела равна сумме масс частей, составляющих это тело*).

Система тел, взаимодействующих только между собой, называется ***замкнутой***.

Рассмотрим замкнутую систему тел массами m_1 и m_2 (рис. 3.1).

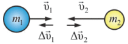


Рис. 3.1. Замкнутая система тел массами m_1 и m_2, сталкивающихся друг с другом со скоростями υ_1 и υ_2

Столкнём эти два тела. Опыт показывает, что приращённые скорости $\Delta\vec{\upsilon}_1$ и $\Delta\vec{\upsilon}_2$ всегда имеют противоположное направление (отличное знаком), а модули приращений скорости относятся как

$$\frac{|\Delta\vec{\upsilon}_1|}{|\Delta\vec{\upsilon}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (3.2.1)$$

(тело, обладающее большей массой, меньше изменяет скорость).

Приняв во внимание направление скоростей, запишем:

$$m_1\Delta\vec{\upsilon}_1 = -m_2\Delta\vec{\upsilon}_2.$$

При $\upsilon << c$ масса $m = \text{const}$ (ньютоновская, классическая механика), тогда имеем:

$$\Delta\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right) = -\Delta\left(m_2\vec{\upsilon}_2\right).$$

Произведение массы тела m на скорость $\vec{\upsilon}$ *называется* ***импульсом тела*** $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}. \tag{3.2.2}$$

3.3. Второй закон Ньютона. Принцип суперпозиции

Во многих прикладных задачах требуется знать движение тела под действием заданных сил. Все подобные задачи, вместе взятые, *составляют* ***основную задачу динамики***: найти закон движения тела или системы тел при условии, что действующие силы известны. Решение задачи динамики может быть найдено при помощи второго закона Ньютона. В некоторых случаях эта задача имеет простое решение, в других – ее решение наталкивается на непреодолимые математические трудности.

Математическое выражение ***второго закона Ньютона***:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{3.3.1}$$

– скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе.

Отсюда $d\vec{p} = \vec{F}dt$ *– изменение импульса тела равно импульсу силы.*

Из (3.3.1) получим выражение второго закона через ускорение a:

$\dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}$. Так как $m = \text{const}$, то $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$. Но $\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}$, тогда

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{3.3.2}$$

Это привычная запись второго закона Ньютона, или ***основное уравнение динамики поступательного движения материальной точки.***

Принцип суперпозиции, или принцип независимости действия сил

Силы в механике подчиняются ***принципу суперпозиции***. *Если на материальное тело действуют несколько сил, то результирующую силу* $\vec{F}$ *можно найти из выражения*:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \tag{3.3.3}$$

Из второго закона Ньютона имеем:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i,$$

где $\vec{a}_i$ – ускорение тела под действием силы $\vec{F}_i$. Таким образом, *ускорение тоже подчиняется принципу суперпозиции:*

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i. \tag{3.3.4}$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое же ускорение, как если бы других сил не было. Найдем изменение импульса тела за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1 = \vec{F}\Delta t, \text{ или } \Delta\left(m\vec{\upsilon}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt, \tag{3.3.5}$$

т. е. изменение импульса тела равно импульсу силы.

3.4. Третий закон Ньютона

Действие тел друг на друга носит характер взаимодействия.

Третий закон Ньютона отражает тот факт, что сила есть результат взаимодействия тел, и устанавливает, что ***силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по величине и противоположны по направлению***:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{3.4.1}$$

Однако третий закон справедлив не всегда. Он выполняется в случае контактных взаимодействий, т. е. при соприкосновении тел, а также при взаимодействии тел, находящихся на расстоянии друг от друга, но покоящихся друг относительно друга.

Законы Ньютона плохо работают при $\upsilon \approx c$ (релятивистская механика), а также при движении тел очень малых размеров, сравнимых с размерами элементарных частиц.

3.5. Импульс произвольной системы тел

В любой системе частиц имеется одна замечательная точка *C*, называемая *центром инерции*, или *центром масс*, которая обладает рядом интересных и важных свойств. Положение этой точки характеризует распределение масс этой системы.

Радиус-вектор простой системы двух частиц (рис. 3.2) m_1 и m_2 можно найти по формуле $\vec{r}_c = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$.

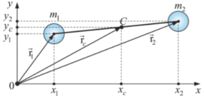


Рис. 3.2. Координаты центра масс системы, состоящей из двух тел массами m_1 и m_2

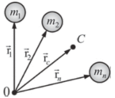


Рис. 3.3. Произвольная система тел с центром инерции C

В общем случае (рис. 3.3) радиус-вектор центра масс системы, состоящей из n материальных точек, равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \tag{3.5.1}$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ – общая масса системы, n – число точек системы.

При этом не надо путать *центр масс* с центром *тяжести системы* – с точкой приложения равнодействующей сил тяжести всех тел системы.

Центр тяжести совпадает с центром масс (центром инерции), если g (ускорение силы тяжести) для всех тел системы одинаково (когда размеры системы гораздо меньше размеров Земли).

Скорость центра инерции системы $\vec{\upsilon}_c$ равна:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i.$$

Здесь

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i \tag{3.5.2}$$

– импульс системы тел, $\vec{\upsilon}_i$ – скорость i-го тела системы. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_c,$$

то импульс системы тел можно определить по формуле

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c. \qquad (3.5.3)$$

Импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость её центра инерции.

Центр масс замкнутой системы движется всегда с постоянной скоростью, поскольку импульс такой системы сохраняется.

Если продифференцировать теперь (3.5.3) по времени и учесть, что производная импульса системы есть равнодействующая внешних сил, то получим ***уравнение движения центра масс системы*** в общем случае:

$$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i.$$

Видно, что центр масс системы движется точно так же, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе всех частиц системы, под действием суммы всех внешних сил, приложенных к системе.

3.6. Основное уравнение динамики поступательного движения произвольной системы тел

Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называют ***внешними телами****, а силы, действующие на систему со стороны этих тел, –* ***внешними силами****. Силы взаимодействия между телами внутри системы называют* ***внутренними силами****.*

Результирующая всех внутренних сил, действующих на i-е тело:

$$\vec{F}_i^{\,внутр} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ik} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{in},$$

где $k \neq i$ – т. к. i-я точка не может действовать сама на себя.

Обозначим $\vec{F}_i^{\,внеш}$ – *результирующая всех внешних сил*, приложенных к i-й точке системы.

По второму закону Ньютона можно записать систему уравнений:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right) = \vec{F}_1^{\,внеш} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1n},$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2\vec{\upsilon}_2\right) = \vec{F}_2^{\,внеш} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2n},$$

. . . .

$$\frac{d}{dt}\left(m_n\vec{\upsilon}_n\right) = \vec{F}_n^{\,внеш} + \vec{F}_{n1} + \ldots + \vec{F}_{n,n-1}.$$

Сложим эти уравнения и сгруппируем попарно силы $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_{ki}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,внеш} + \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right) + \ldots + \left(\vec{F}_{n-1,n} + \vec{F}_{n,n-1}\right).$$

По третьему закону Ньютона, $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, поэтому все выражения в скобках в правой части уравнения равны нулю. Тогда остаётся

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,внеш} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Назовем $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,внеш}$ *главным вектором всех внешних сил*, тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{3.6.1}$$

Скорость изменения импульса системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на эту систему.

Это уравнение называют ***основным уравнением динамики поступательного движения системы тел***.

Так как импульс системы $\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$, то

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{\upsilon}_c\right) = \vec{F}.$$

Можно по-другому записать ***основное уравнение динамики поступательного движения системы тел***:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}, \tag{3.6.3}$$

здесь $\vec{a}_c$ – ускорение центра инерции.

Центр механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

На основании третьего закона Ньютона, силы, действующие на тела системы со стороны других тел системы (внутренние силы), взаимно компенсируют друг друга. Остаются только внешние силы.

В общем случае движение тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_c$ и вращательного вокруг *центра инерции*.

3.7. Закон сохранения импульса и однородность пространства

Механическая система называется ***замкнутой*** *(или изолированной), если на неё не действуют внешние силы, т. е. она не взаимодействует с внешними телами.*

Строго говоря, каждая реальная система тел всегда незамкнута, т. к. подвержена, как минимум, воздействию гравитационных сил. Однако если внутренние силы гораздо больше внешних, то такую систему можно считать замкнутой (например, Солнечная система).

Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv 0, \qquad (3.7.1)$$

отсюда

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_c = \text{const}. \qquad (3.7.2)$$

Это есть ***закон сохранения импульса****: импульс замкнутой системы не изменяется во времени.*

Импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$, тогда

$$m\vec{\upsilon}_c = \text{const}. \qquad (3.7.3)$$

При любых процессах, происходящих в замкнутых системах, скорость центра инерции сохраняется неизменной.

Закон сохранения импульса является одним из фундаментальных законов природы. Он был получен как следствие законов Ньютона, но он справедлив и для микрочастиц, и для релятивистских скоростей, когда $\upsilon \approx c$.

Если система не замкнута, но главный вектор внешних сил $\vec{F} = 0$, *то* $\vec{p}_{сист} = \text{const}$, *как если бы внешних сил не было* (например, прыжок из лодки, выстрел из пушки или реактивное движение (рис. 3.3, 3.4)).

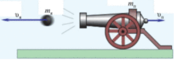


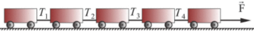
Рис. 3.3. Выстрел из пушки. Скорость ядра $\upsilon_я$, масса ядра $m_я$, скорость пушки $\upsilon_п$, масса пушки $m_п$. $\upsilon_я m_я = \upsilon_п m_п$

Рис. 3.4. Реактивное движение. Полет шаттла

Закон сохранения импульса является следствием симметрии пространства – времени, в его основе лежит такое свойство пространства – времени, как *однородность пространства.*

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Какая система отсчета называется инерциальной? неинерциальной?
2. Почему система отсчета, связанная с Землей, неинерциальная?
3. Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать?
4. Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона Ньютона? Почему?
5. В чем заключается принцип независимости действия сил?
6. Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми?
7. Является ли Вселенная замкнутой системой? Почему?
8. В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется?
9. Почему он является фундаментальным законом природы?
10. Каким свойством пространства и времени обусловливается справедливость закона сохранения импульса?
11. Что называется центром масс системы материальных точек? Как движется центр масс замкнутой системы?
12. В чем физическая сущность первого закона Ньютона?
13. Сообщаете ли вы импульс Земле во время прогулки?
14. Телу какой массы сила 1 Н сообщает ускорение 1 м/с^2?
15. Тело массой 1 кг получило ускорение 1 см/с^2. Чему равна сила, действующая на тело?
16. Может ли КПД быть больше единицы? равным единице?
17. Масса самолета в 100 раз больше массы автомобиля, а скорость автомобиля в 20 раз меньше скорости самолета. Чему равна кинетическая энергия самолета или автомобиля?
18. Пусть из ружья в горизонтальном направлении стреляет охотник, стоящий на абсолютно гладком льду. Масса охотника 60 кг. Чему равна его скорость при выстреле?
19. Состав из 5 вагонов паровоз тянет с силой $\vec{F}$, как показано на рисунке. Масса вагона m.



а) Выразите натяжение связей T_1, T_2, T_3 и T_4 через F и m. Трением можно пренебречь.

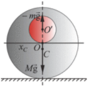
б) Чему равно ускорение паровоза?

20. Что можно сказать о тормозном пути двух одинаковых грузовиков, движущихся с одинаковой скоростью на одном и том же участке дороги, если один грузовик пустой, а другой полностью загружен? Поясните ответ.

Примеры решения задач

Задача 3.1. Из однородной круглой пластинки вырезан круг, центр которого O' находится в середине вертикального радиуса большего круга R = 0,5 м (рис). Определите положение центра масс фигуры, если радиус отверстия r = 0,2 м. Каким типом равновесия обладает тело в данном положении?

Дано:
$R = 0{,}5$ м
$r = 0{,}2$ м
$OO' = R/2$
x_C – ?



Решение. Представим, что отверстие заполнено тем же материалом, из которого сделан круг. Тогда центр масс сплошного большого круга находится в точке O и в ней приложена сила тяжести $M\vec{g}$. Чтобы скомпенсировать эффект заполнения отверстия, считаем, что в центре маленького круга должна быть приложена сила $-\grave{o}\,\vec{g}$, направленная вверх.

Из соображений симметрии центр масс фигуры находится на вертикальной оси, соединяющей центры кругов OO'. Поместим начало вертикальной оси x в центр большого круга O. Учитывая выражение для центра масс $x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$, получаем:

$$x_C = \frac{-m\cdot(R/2)}{M-m} = -\frac{\rho\pi r^2\cdot(R/2)}{\rho\pi h\left(R^2-r^2\right)} = -\frac{r^2 R}{2\left(R^2-r^2\right)},$$

где ρ – плотность пластинки; h – её толщина.

Центр масс находится ниже центра большого круга на расстоянии x_C. Равновесие фигуры – устойчивое, поскольку центр тяжести занимает наинизшее из возможных положений. При отклонении круг будет стремиться вернуться в прежнее положение.

$$x_C = -\frac{0{,}2^2\cdot 0{,}5}{2\left(0{,}5^2-0{,}2^2\right)} = -0{,}048\ \text{м}.$$

Ответ: $x_C = -0{,}048$ м.

Задача 3.2. Стреляя из автомата АК-47, солдат испытывает отдачу: на него действует средняя сила $F_{\text{ср}}$, эквивалентная весу массы M = 6,4 кг. Учитывая, что масса пули m = 7 г и вылетает она с начальной скоростью $\upsilon = 850$ м/с, определить скорострельность n автомата.

Решение. За время Δt выпускается $\Delta N = n\Delta t$ пуль. Они уносят импульс $\Delta p = m\upsilon\Delta N = m\upsilon n\Delta t$. По закону сохранения такой же импульс передается автомату. Поэтому по второму закону Ньютона средняя сила отдачи равна:

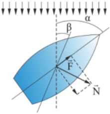
$$F_{ср} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m\upsilon n.$$

По условию $F_{ср} = Mg$. Отсюда находим скорострельность оружия:

$$n = \frac{F_{ср}}{m\upsilon} = \frac{Mg}{m\upsilon} = \frac{6{,}5 \cdot 9{,}8}{7 \cdot 10^{-3} - 850} = 10{,}7\ с^{-1} \approx 642\ мин^{-1}.$$

Естественно, при стрельбе короткими очередями и, тем более, одиночными выстрелами число выстрелов в минуту будет меньшим.

Задача* 3.3. ***Курс бейдевинд.*** Объясните, почему яхта может идти против ветра курсом бейдевинд (от гол. *bijde wint*), когда угол между линией ветра и направлением корма-нос яхты меньше 90°.



Решение. На рис. угол между направлением скорости ветра и осью яхты равен $\pi - \alpha$. Если плоскость паруса расположена перпендикулярно направлению скорости ветра, то величина силы давления ветра R, действующей на парус, максимальна. Если же плоскость паруса образует с направлением скорости ветра угол β, то сила давления на парус $N = R\sin\beta$. Эта сила заставляет яхту смещаться. Однако реальной движущей силой является проекция силы N на направление оси яхты, она равна

$$F = N\sin(\alpha - \beta),$$

поскольку большая поверхность киля не позволяет яхте смещаться в направлении, перпендикулярном оси. Из этого следует, что

$$F(\beta) = R\sin\beta\sin(\alpha - \beta).$$

Эта функция достигает максимального значения при $\beta = \alpha/2$:

$$F_m = R\sin^2(\alpha/2).$$

В этом случае парус расположен так, что делит точно пополам угол между направлением скорости ветра и осью.

Задача* 3.4. ***Две Кембриджские задачи.*** Разберем задачу о движении цепи, решение которой известно с середины XIX в.

Однородная цепь свешивается с края стола. Остальная часть цепи сложена в кучу на крае стола. В начальный момент времени скорость цепи равна нулю. Найти ускорение цепи.

Решение. Направим ось z вертикально вниз, начало координат – на уровне поверхности стола. Пусть z – координата нижнего конца цепи A, $\upsilon_z = \upsilon$ – проекция скорости точки A. Масса движущейся части цепи

$m = \rho z$, ρ – линейная плотность цепи. Исходя из уравнения Мещерского $\frac{\mathrm{d}m\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + \vec{F}$ получим уравнение

$$\mathrm{d}(z\upsilon)/\mathrm{d}t = gz. \qquad (1)$$

Рассмотрим частный случай, соответствующий начальным условиям $z(0) = 0,\ \upsilon(0) = 0$: первоначальная длина свисающей части цепи ничтожно мала.

Для получения решения уравнения (1) умножим обе части на $z\upsilon$. Тогда уравнение можно представить в виде производной функции $F(z,\upsilon)$:

$$z\upsilon\frac{\mathrm{d}z\upsilon}{\mathrm{d}t} = gz^2\upsilon,\ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0,\ F = \frac{1}{2}(z\upsilon)^2 - \frac{1}{3}gz^3,$$

следовательно, $F = C$:

$$\frac{1}{2}(z\upsilon)^2 - \frac{1}{3}gz^3 = C. \qquad (2)$$

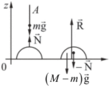
Согласно начальным условиям $C = 0$. Из (2) находим $\upsilon^2 = 2gz/3$. Дифференцируя по времени, получим ускорение движущейся части цепи

$$2\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{2g}{3}\frac{dz}{dt},\ \text{отсюда}\ \frac{d\upsilon}{dt} = a = \frac{g}{3}.$$

Ответ: $a = g/3$.

Задача* 3.5. Приведем другой интересный результат. Однородная цепь AB массой M висит вертикально, касаясь концом B поверхности пола. Цепь отпускают. Найдите зависимость величины силы давления цепи на пол. Покажите, что в момент падения конца A на пол величина силы давления в три раза больше веса цепи.

Решение. Масса цепи длиной l равна $M = \rho l$, где ρ – линейная плотность цепи. Направим ось z вертикально вверх, начало координат – на уровне поверхности пола. В момент времени t координата точки A равна z, проекцию скорости точки A на ось z обозначим υ.



Масса движущейся части цепи $m(t) = \rho z$ (рис.). На нее действуют сила тяжести и сила реакции $\vec{N}$ со стороны части цепи массой $M - m(t)$, лежащей на полу. На эту часть цепи действуют три силы – сила тяжести, сила давления $\vec{N}$ со стороны движущейся нити и сила реакции пола $\vec{R}$. Из уравнений (1 и 2) предыдущей задачи можно записать:

$$\mathrm{d}(\rho z\upsilon)/\mathrm{d}t = -\rho gz + N_z, \qquad (1)$$

$$0 = -(M - m)g - N_z + R_z. \qquad (2)$$

Отметим, что присоединение элемента $\rho\Delta z$ к неподвижной части цепи имеет характер удара – его скорость мгновенно изменяется от значения $-\upsilon$ до нуля. Приращение импульса $\rho\Delta z\upsilon$ сообщает сила реакции $\vec{N}$: $p\Delta z\upsilon = N_z\Delta t$. Переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим $N_z = \rho\upsilon^2$. Следовательно, из (1), (2) получим

$$d\upsilon / dt = -g \tag{3}$$

$$R_z = \rho(l - z)g + \rho\upsilon^2. \tag{4}$$

Из (3) следует, что цепь свободно падает. Поскольку начальные условия $z(0) = l_0$, $\upsilon(0) = 0$, то $\upsilon(t) = -gt$, $z(t) = l - gt^2/2$.

Из (4), (5) получим величину силы давления цепи на пол – вес цепи:

$$R_z(t) = \frac{3}{2}\rho g^2 t^2, \text{ или } R_{z(z)} = 3\rho g(l - z).$$

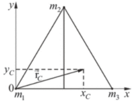
Конец цепи A достигает пола в момент времени $T = (2l/g)^{1/2}$. В этот момент времени вес цепи $R_z(T) = 3Mg$.

Задача 3.6. Определите положение центра масс r_C системы из трех материальных точек массами m_1 = 1 кг, m_2 = 2 кг и m_3 = 3 кг, находящихся в вершинах правильного треугольника со стороной a = 1 м.

Дано:
m_1 = 1 кг
m_2 = 2 кг
m_3 = 3 кг
a = 1 м
r_C – ?

Решение. Поместим начало координат в точку, где находится масса m_1, ось x направим вдоль прямой, соединяющей точки с массами m_1 и m_3 (рис). Координаты соответствующих масс будут равны:

$$x_1 = 0,\ x_2 = a\sin 30°,\ x_3 = a;$$
$$y_1 = 0,\ y_2 = a\cos 30°,\ y_3 = a.$$



В соответствии с формулой координат центра масс определяем:

$$x_C = \frac{m_2 a\sin 30° + m_3 a}{m_1 + m_2 + m_3},\ y_C = \frac{m_2 a\cos 30°}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Модуль радиус-вектора центра масс рассматриваемой системы:

$$r_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \frac{a\sqrt{\left(m_2 \sin 30^\circ + m_4\right)^2 + \left(m_2 \cos 30^\circ\right)^2}}{m_1 + m_3 + m_4},$$

$$r_C = \frac{1\sqrt{(2\cdot 0{,}5 + 3)^2 + (2\cdot 0{,}866)^2}}{1 + 2 + 3} = 0{,}726 \text{ м}.$$

Ответ: $r_C = 0{,}726$ м.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1. При маневрировании космического корабля из его двигателей вырывается струя газов со скоростью $\upsilon = 850$ м/с, при этом расход горючего составляет $\Delta m/\Delta t = 0{,}25$ кг/с. Определите реактивную силу двигателей корабля.

Ответ: $F = Q_m\upsilon = 212{,}5$ Н.

Задача 3.2. Вертолет с ротором, диаметр d которого равен 14 м, находится в воздухе над одной и той же точкой поверхности Земли. Ротор отбрасывает вертикально вниз струю воздуха со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Определите, какая масса воздуха ежесекундно отбрасывается ротором вертолета вертикально вниз (считайте, что диаметр струи приблизительно равен диаметру вращающегося ротора; плотность воздуха $\rho = 1{,}32$ кг/м^3).

Ответ: $\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \rho\dfrac{\pi d^2}{4}\upsilon = 2031$ кг/с.

Задача* 3.3. На внутренней поверхности сферы радиусом 0,1 м, вращающейся вокруг вертикальной оси, находится небольшой предмет. С какой постоянной частотой должна вращаться сфера, чтобы предмет находился в точке, направление на которую составляет угол 45°? Коэффициент трения между предметом и поверхностью сферы равен 0,2 ($g \approx 10$ м/с^2).

Ответ: $n = \dfrac{\varphi}{2\pi}\omega = 1{,}55$ об/с.

Задача 3.4. По наклонной плоскости скользят два груза массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны, соответственно: $\mu_1 = 0{,}7$; $\mu_2 = 0{,}6$. Определите силу натяжения нити, если угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$.

Ответ: $F_{нат} = (\mu_2 - \mu_1)\dfrac{m_1 m_2 g\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 0{,}58$ Н.

Задача 3.5. Футбольный мяч при движении в воздухе испытывает силу сопротивления, пропорциональную квадрату скорости мяча относительно воздуха. Перед ударом футболиста мяч двигался в воздухе горизонтально со скоростью $\upsilon_1 = 20$ м/с и ускорением $a_1 = 13$ м/с^2. После удара мяч полетел вертикально вверх со скоростью $\upsilon_2 = 10$ м/с. Каково ускорение a_2 мяча сразу после удара?

Ответ: $a_2 = (k/m)\upsilon_2^2 + g = 12$ м/с^2.

Задача* 3.6. Человек, сидящий в лодке, бросает камень вдоль нее под углом 45° к горизонту. Масса камня 10 кг, масса человека и лодки 100 кг, начальная скорость камня относительно берега 10 м/с. Найдите расстояние между точкой падения камня и лодкой в момент, когда камень коснется воды. Считать, что во время полета камня, лодка движется равномерно.

Ответ: $l = \dfrac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right) = 11$ м.

Задача 3.7. Орудие, имеющее массу ствола 500 кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда 5 кг, его начальная скорость 460 м/с. После выстрела ствол откатывается на 40 см. Определите среднее значение силы торможения, возникающей в противооткатном устройстве. Ответ представьте в килоньютонах.

Ответ: $F_т = m_1 a = 13{,}2$ кН.

Задача 3.8. Через невесомый блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы массами 1 кг и 2 кг. На второй из грузов положен перегрузок массой 0,5 кг. С какой силой будет действовать этот перегрузок на тело, на котором он лежит, если вся система придет в движение?

Ответ: $F_3 = \dfrac{2m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}8$ Н.

Задача* 3.9. При движении в воздухе пули массой $m = 20$ г ее скорость уменьшилась от $\upsilon_0 = 700$ м/с до $\upsilon = 100$ м/с за время $\Delta t = 1$ с. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определите коэффициент сопротивления движению k. (Действием силы тяжести пренебрегаем.)

Ответ: $k = \dfrac{m(\upsilon_0 - \upsilon)}{\upsilon\upsilon_0 t} = 1{,}7 \cdot 10$ кг/с.

Задача 3.10. Два одинаковых шарика налетают друг на друга со скоростями υ_1 и υ_2 под углом α и разлетаются после абсолютно упругого удара со скоростями u_1 и u_2. Найти угол β разлета шариков после соударения.

Ответ: $\beta = \arccos\left(\dfrac{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - u_1^2 - u_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2\cos\alpha}{2u_1 u_2}\right)$.

Задача 3.11. Через неподвижный блок перекинули нить, к концам которой подвешали два груза массой 200 г. Какой добавочный груз нужно поместить на один из висящих грузоо, чтобы каждый из них переместился на 150 см за 5 с.

Ответ: $\Delta m = 2ma/(g - a) = 0{,}005$ кг.

Задача 3.12. На столе стоит тележка $m_1 = 4$ кг. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через блок. С каким ускорением a будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой $m_2 = 1$ кг?

Ответ: $a = m_2g/(m_1 + m_2) = 1{,}96$ м/с^2.

Задача 3.13. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концу которого привязали грузы массами $m_1 = 1{,}5$ кг $m_2 = 3$ кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

Ответ: $F = \dfrac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g = 39{,}2$ Н.

Задача 3.14. На гладком столе лежит брусок массой $m = 4$ кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концу шнуров подвешены гири, массы которых $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найти ускорение a, с которым движется брусок, и силу натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трения пренебречь.

Ответ: $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m} = 1{,}4$ м/с.

Задача 3.15. Шарик массой $m = 300$ г ударился о стену и отскочил от неё. Определить импульс p_1, полученный стеной, если в последний момент перед ударом шарик имел скорость $\upsilon_0 = 10$ м/с, направленную под углом $\alpha = 30°$ к поверхности стены. Удар считать абсолютно упругим.

Ответ: $p_1 = 2m\upsilon_0\sin\alpha = 3$ Н·с.

Задача* 3.16. Парашютист, масса которого $m = 80$ кг, совершает затяжной прыжок. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости парашютиста $F_r = k\upsilon^2$, где коэффициент сопротивления равен $k = 0{,}6$ кг/м. Начальная скорость парашютиста равна нулю. Определить, через какой промежуток времени t скорость падения парашютиста будет равна 0,9 от скорости υ_r установившегося движения.

Ответ: $t = \dfrac{\ln 19}{2}\sqrt{\dfrac{80}{0{,}6 \cdot 9{,}8}} = 5{,}43$ с.

ГЛАВА 4. СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

Динамика исследует законы и причины, вызывающие движение тела, т. е. изучает движение материальных тел под действием приложенных к ним сил. В этой главе анализируется виды и категории сил в природе, рассматриваются силы тяжести, силы упругости, силы трения.

4.1. Виды и категории сил в природе

Одно из простейших определений силы: *влияние одного тела (или поля) на другое, вызывающее ускорение*, – *это* **сила.**

Однако спор вокруг определения силы не закончен до сих пор. Это обусловлено трудностью объединения *в одном определении* сил, различных по своей природе и характеру проявления. По современным представлениям все явления, протекающие во вселенной, обусловлены четырьмя типами *сил или взаимодействий*:

- ***гравитационные*** (проявляются в виде сил всемирного тяготения);
- ***электромагнитные*** (обусловливают существование атомов, молекул и макротел);
- ***сильные*** (ответственны за связь частиц в ядрах);
- ***слабые*** (ответственны за распад частиц).

Гравитационные и ***электромагнитные*** силы нельзя свести к другим, более простым, силам, поэтому их называют ***фундаментальными***.

Законы фундаментальных сил просты и выражаются точными формулами. Для примера можно привести формулу гравитационной силы взаимодействия двух материальных точек имеющих массы m_1 и m_2:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (4.1.1)$$

где r – расстояние между точками, γ – гравитационная постоянная.

В качестве второго примера можно привести формулу для определения силы электростатического взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2:

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (4.1.2)$$

где k_0 – коэффициент пропорциональности.

Для других сил, например для упругих сил и сил трения, можно получить лишь приближенные, эмпирические формулы.

Силы, рассматриваемые в классической механике, имеют электромагнитную (силы упругости, силы трения) и гравитационную природу (силы тяготения, силы тяжести).

4.2. Сила тяжести и вес тела

В динамике, при изучении движения тел, необходимо знать силы, действующие на тело, и их зависимость от различных величин.

Одна из фундаментальных сил, ***сила гравитации***, проявляется на Земле в виде ***силы тяжести*** – *силы, с которой все тела притягиваются к Земле.*

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением – *ускорением свободного падения g*, как, например, в школьном опыте – «трубка Ньютона» (рис. 4.1). Отсюда вытекает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует ***сила тяжести*** $m\vec{g}$. Она приблизительно равна силе гравитационного притяжения к Земле (различие между силой тяжести и гравитационной силой обусловлено тем, что система отсчета, связанная с Землей, не вполне инерциальная).

Рис. 4.1. Трубка Ньютона – вакуумированная колба, в которой находятся перо и дробина. Поскольку оба этих тела движутся с одним и тем же ускорением, то дна трубки они достигают одновременно

Если подвесить тело (рис. 4.2) или положить его на опору, то сила тяжести уравновесится силой $\vec{R}$, которую называют ***реакцией опоры***, или ***подвеса***.

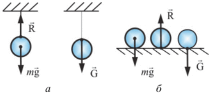


Рис. 4.2. Тело на подвесе (а) и на опоре (б)

По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору *с силой* $\vec{G}$, *которая называется* ***весом тела***. Итак, ***вес тела*** – это сила, с которой тело в состоянии покоя действует на подвес или опору вследствие гравитационного притяжения к Земле. Поскольку силы $m\vec{g}$ и $\vec{R}$ уравновешивают друг друга, то выполняется соотношение

$$m\vec{g} = -\vec{R}.$$

Согласно третьему закону Ньютона $\vec{G} = -\vec{R}$. Тогда

$$\vec{G} = m\vec{g}, \qquad (4.2.1)$$

то есть *вес и сила тяжести равны друг другу, но приложены к разным точкам: вес – к подвесу или опоре, сила тяжести – к самому телу*. Это равенство справедливо, если подвес (опора) и тело покоятся относительно Земли (или двигаются равномерно, прямолинейно). Если имеет место движение с ускорением, то справедливо соотношение

$$G = mg \pm ma = m(g \pm a). \qquad (4.2.2)$$

Вес тела может быть больше или меньше силы тяжести: если g и a направлены в одну сторону (тело движется вниз или падает), то $G < mg$, и если наоборот, то $G > mg$. Если же тело движется с ускорением $a = g$, то $G = 0$ – т. е. наступает *состояние невесомости*.

4.3. Упругие силы

Электромагнитные силы в механике проявляют себя как *упругие силы* и *силы трения*.

Под действием внешних сил возникают *деформации* (от лат. *deformatio* – искажение), т. е. смещение частиц тела из равновесных положений. Если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние форма и размеры тела, то деформация называется *упругой*. Деформация имеет упругий характер в случае, если внешняя сила не превосходит определенного значения, называемого *пределом упругости*. При превышении этого предела деформация становится *пластичной, или неупругой*, т. е. первоначальные размеры и форма тела полностью не восстанавливаются.

Рассмотрим упругие деформации.

В деформированном теле (рис. 4.3) возникают упругие силы, уравновешивающие внешние силы. Под действием *внешней силы* $F_{вн}$ пружина получает *удлинение x*, в результате в ней возникает *упругая сила* $F_{упр}$, *уравновешивающая* $F_{вн}$.

Упругие силы возникают во всей деформированной пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой упругости $F_{упр}$.

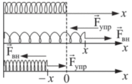


Рис. 4.3. Сжатие или растяжение пружины под действием внешней силы $F_{вн}$: сила упругости $F_{упр}$ уравновешивает внешнюю силу $F_{вн}$, $F_{упр} = -F_{вн}$

Удлинение пружины пропорционально внешней силе и определяется *законом Гука*:

$$x = \frac{1}{k} F_{\text{âi}}, \tag{4.3.1}$$

где k – жесткость пружины. Видно, что чем больше k, тем меньшее удлинение получит пружина под действием данной силы.

Гук Роберт (1635–1703) – знаменитый английский физик, сделавший множество изобретений и открытий в области механики, термодинамики, оптики. Установил постоянные точки термометра – точку таяния льда, точку кипения воды. Усовершенствовал микроскоп, что позволило ему осуществить ряд микроскопических исследований, в частности наблюдать тонкие слои в световых пучках, изучать строение растений. Положил начало физической оптике.

Т. к. упругая сила отличается от внешней только знаком, т. е. $F_{\text{упр}} = -F_{\text{вн}}$, закон Гука можно записать в виде

$$x = -\frac{1}{k} F_{\text{упр}}, \text{ отсюда } F_{\text{упр}} = -kx.$$

Потенциальная энергия *упругой пружины равна работе, совершенной над пружиной.*

Так как сила не постоянна, элементарная работа $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x$, или $\mathrm{d}A = -kx\mathrm{d}x$.

Тогда ***полная работа***, *которая совершена пружиной, равна*:

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_0^x kx\mathrm{d}x = -\frac{kx^2}{2}.$$

Закон Гука для стержня

Одностороннее (или продольное) растяжение (сжатие) стержня состоит в увеличении (уменьшении) длины стержня под действием внешней силы $\vec{F}$ (рис. 4.4).

Такая деформация приводит к возникновению в стержне упругих сил, которые принято характеризовать *напряжением* σ:

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S},$$

где $S = \pi d^2/4$ – площадь поперечного сечения стержня, d – его диаметр.

В случае растяжения σ считается положительной, а в случае сжатия – отрицательной. Опыт показывает, что *приращение длины* стержня Δl *пропорционально напряжению* σ:

$$\Delta l = \sigma/k.$$

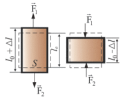


Рис. 4.4. Одностороннее растяжение (сжатие) стержня под действием внешней силы $\vec{F}$

Коэффициент пропорциональности k, как и в случае пружины, зависит от свойств материала и длины стержня.

Доказано, что $k = E/l_0$, где E – *величина, характеризующая упругие свойства материала стержня,* – ***модуль Юнга***[16] (см. приложение 2). E измеряется в Н/м^2 или в Па.

Тогда приращение длины можно выразить через модуль Юнга:

$$\Delta l = \frac{l_0 \sigma}{E},$$

или, обозначив $\dfrac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$ (*относительное продольное растяжение /сжатие*), получим

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma. \qquad (4.3.2)$$

Закон Гука для стержня: *относительное приращение длины стержня прямо пропорционально напряжению и обратно пропорционально модулю Юнга.*

Заметим, что растяжение или сжатие стержней сопровождается соответствующим изменением их поперечных размеров d_0 и d (рис. 4.4).

Относительное поперечное растяжение (*сжатие*)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0}.$$

Отношение относительного поперечного растяжения стержня $\dfrac{\Delta d}{d_0}$ *к относительному продольному растяжению* $\dfrac{\Delta l}{l_0}$ *называют* ***коэффициентом Пуассона***[17] (см. приложение 2):

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \qquad (4.3.3)$$

Потенциальная энергия упруго растянутого (сжатого) стержня

$$E_{\text{п}} = \int_0^{\Delta l} F \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2 = \frac{E\varepsilon}{2}V,$$

где V – объем стержня. Объемная плотность потенциальной энергии тела w_σ при растяжении (сжатии) определяется удельной работой по преодолению упругих сил $A_{упр}$, рассчитанной на единицу объема тела:

$$w_\sigma = A_{упр} = \frac{\sigma^2}{2E}. \qquad (4.3.4)$$

Диаграмма деформации

На рис. 4.5 показан график зависимости нормального напряжения $\sigma = F/S$ от относительного удлинения $\varepsilon = \Delta l/l$ при растяжении тела.

В области *0–1* (рис. 4.5) упругие деформации подчиняются закону Гука: напряжение $\sigma_п$, возникающее под действие внешних сил, прямо пропорционально относительной деформации ε:

$$\sigma = E\varepsilon = E\Delta l/l.$$

Максимальное напряжение, после снятия которого тело еще способно восстановить первоначальную форму и объем, называется *пределом упругости* $\sigma_у$ (точка *2*).

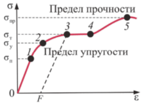


Рис. 4.5. График зависимости нормального напряжения от относительного удлинения

При дальнейшем увеличении напряжения возникают остаточные деформации (участок *2–3*). За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации, и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, будет представлен параллельной прямой *3F* . Затем удлинение деформированного тела происходит без увеличения внешней нагрузки (участок *3–4*). Точка *3* на графике соответствует *пределу текучести* $\sigma_т$.

Наибольшее напряжение, которое выдерживает тело, не разрушаясь, называется *пределом прочности* $\sigma_{пр}$ (точка *5*). На практике, чтобы избежать разрушения какой-либо детали, её проектируют с *запасом прочности*:

$$\frac{\sigma_{пр}}{\sigma_{доп}} = n,$$

где $\sigma_{доп}$ – допустимое напряжение.

Диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от многих факторов. Например, при кратковременном действии сил твердое тело может проявить себя как хрупкое, а при длительном воздействии слабых сил является текучим.

Некоторые японские производители получают углеродное волокно, способное выдерживать напряжение $\sigma_{пр}$ до $12 \cdot 10^{11}$ Па . Основное применение таких материалов – устройства для отвода тепла в авиационной и космической технике. Отметим, что алмаз выдерживает напряжение $\sigma_{пр} = 8{,}5 \cdot 10^{11}$ Па . Атомные подводные лодки с корпусом из титанового сплава могут погружаться на глубину $h = 800$ м. Здесь давление достигает величины $P = \rho g h \sim 7{,}3 \cdot 10^{6}$ Па .

«Забывчивость» и «память» металлов

При остаточной относительной деформации $\varepsilon_{ост} = 0{,}1 - 0{,}01$ металл *забывает исходную форму и принимает новую.* На такой «забывчивости» основаны технологические процессы обработки металлов.

В 1953 г. появился сплав Оландера, а в 1963 – нитинол (сплав никеля с титаном), обладающие способностью *запоминать форму.*

Пусть остаточная деформация стержня при температуре t_1 равна $\varepsilon_{ост} \sim 0{,}1$. При нагревании деформированного стержня из обычного металла до температуры $t_2 > t_1$ сохраняется остаточная деформация. Поэтому его форма не изменяется. Такой же стержень из сплава, запоминающего форму, при температуре $t > t_1$ начинает укорачиваться, а при температуре t_2 остаточная деформация исчезает. Положение интервала (t_1, t_2) на температурной шкале, в котором происходит «вспоминание» исходной формы, можно регулировать. Следовательно, можно деформировать стержень при температуре $t_0 < t_1$ и возвратить к прежней форме в интервале (t_1, t_2).

Как же стержень может сжиматься при нагревании? Если мы растягивали стержень, то он удлинялся вдоль оси, но сжимался в поперечном направлении. «Вспоминая» при нагреве исходную форму, стержень сжимается вдоль оси, а его поперечные размеры возрастают. Как всегда, при нагревании относительное увеличение объема стержня, соответствует приращению температуры. При этом относительное изменение линейных размеров достигает значений 0,1. Растянем, например, скобку при комнатной температуре. Состав сплава подберем так, что при температуре 36 – 37 °С скобка вспоминает прежнюю форму – она сжимается. Так можно сращивать костные переломы.

Сплавы, обладающие уникальным свойством запоминать форму, нашли широкое практическое применение в технике и медицине.

4.4. Деформация сдвига*

Под действием силы $\vec{F}$, приложенной касательно к верхней грани, брусок получает *деформацию сдвига* (рис. 4.6).

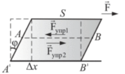


Рис. 4.6. Деформация сдвига тела под действием силы F.
AB – плоскость сдвига;
Δx – абсолютный сдвиг

Назовем величину γ, *равную тангенсу угла сдвига* φ, ***относительным сдвигом***:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x},$$

здесь Δx – ***абсолютный сдвиг***.

При упругих деформациях угол φ бывает очень малым, поэтому

$$\mathrm{tg}\varphi \approx \varphi.$$

Таким образом, *относительный сдвиг*

$$\gamma = \mathrm{tg}\varphi \approx \varphi.$$

Деформация сдвига приводит к возникновению в каждой точке бруска *тангенциального упругого напряжения* τ, которое определяется как *отношение модуля силы упругости к единице площади*:

$$\tau = \frac{F_{\text{упр}}}{S}, \tag{4.3.5}$$

где S – площадь плоскости AB.

Опытным путем доказано, что относительный сдвиг пропорционален тангенциальному напряжению:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau, \tag{4.3.6}$$

где G – *модуль сдвига, зависящий от свойств материала и равный такому тангенциальному напряжению, при котором* $\gamma = \mathrm{tg}\varphi = 1$, *а* $\varphi = 45°$ (*если бы столь огромные упругие деформации были возможны*).

Модуль сдвига измеряется так же, как и модуль Юнга в паскалях (Па).

Удельная потенциальная энергия деформируемого тела при сдвиге равна:

$$w_s = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{4.3.7}$$

4.5. Силы трения

Силой трения называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого. Она всегда направлена противоположно направлению движения. Сила трения прямо пропорциональна силе нормального давления на трущиеся поверхности и зависит от свойств этих поверхностей. *Законы трения связаны с электромагнитным взаимодействием, которое существует между телами.*

Различают трение *внешнее и внутреннее*.

Внешнее трение *возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел* (*трение скольжения или трение покоя*).

Внутреннее трение *наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела* (*например, жидкость или газ*).

Различают ***сухое*** и ***жидкое*** (или ***вязкое***) *трение.*

Сухое трение *возникает между поверхностями твердых тел в отсутствие смазки.*

***Жидким* (*вязким*)** *называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.*

Сухое трение, в свою очередь, подразделяется на ***трение скольжения*** *и* ***трение качения***.

Рассмотрим законы сухого трения (рис. 4.7).

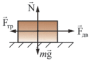


Рис. 4.7. На брусок, лежащий на плоскости, действует сила $\vec{F}_{ââ}$

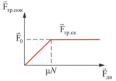


Рис. 4.8. Когда модуль внешней силы $\vec{F}_{ââ}$ *превысит значение* $\vec{F}_0$, *брусок скользит*

Подействуем на тело, лежащее на неподвижной плоскости, внешней силой $\vec{F}_{ââ}$, постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит, внешняя сила $\vec{F}_{ââ}$ уравновешивается некоторой силой $\vec{F}_{òð}$, направленной по касательной к трущейся поверхности, противоположной силе $\vec{F}_{ââ}$. В этом случае $\vec{F}_{òð}$ и есть *сила трения покоя*.

Установлено, что максимальная сила трения покоя не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно пропорциональна модулю *силы нормального давления N*:

$$F_{\text{тр.пок}} = \mu_0 N,$$

где μ_0 – *коэффициент трения покоя*, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение F_0, тело начнет скользить по опоре – трение покоя $F_{\text{тр.пок}}$ сменится трением скольжения $F_{\text{тр.ск}}$ (рис. 4.8):

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \qquad (4.4.1)$$

где μ – *коэффициент трения скольжения*.

Трение качения возникает между шарообразным телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и сила трения скольжения, но коэффициент трения μ здесь значительно меньше. $F_{\text{тр}} = \mu N / R$, где R – радиус катящегося тела.

Сила трения скольжения на наклонной плоскости

На тело, находящееся на наклонной плоскости (рис. 4.9), действуют три силы: *сила тяжести* $m\vec{g}$, *нормальная сила реакции опоры* $\vec{N}$ и *сила сухого трения* $\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила $\vec{F}$ есть *равнодействующая* сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$; она направлена вниз, вдоль наклонной плоскости. Из рис. 4.9 видно, что

$$F = mg\sin\alpha,\ N = mg\cos\alpha.$$

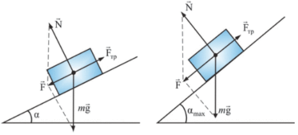


Рис. 4.9. Тело на наклонной плоскости

Если $F < (F_{\text{тр.}})_{\max} = \mu N$ – тело остается неподвижным на наклонной плоскости. *Максимальный угол наклона* α определяется из условия $(F_{\text{тр}})_{\max} = F$ или $\mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$, следовательно

$\mathrm{tg}\alpha_{\max} = \mu$, где μ – коэффициент сухого трения.

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha,$$

$$F = mg\sin\alpha. \qquad (4.4.2)$$

При $\alpha > \alpha_{max}$ тело будет скатываться с ускорением

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \tag{4.4.3}$$

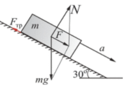
$$F_{\text{ск}} = ma = F - F_{\text{тр}}. \tag{4.4.4}$$

Если дополнительная сила $F_{\text{вн}}$, направленная вдоль наклонной плоскости, приложена к телу, то критический угол α_{max} и ускорение тела будут зависеть от величины и направления этой внешней силы.

Основные закономерности движения по наклонной плоскости рассмотрены в задаче 4.2.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Какие типы сил (взаимодействий) вы знаете?
2. Чем характеризуется сила в каждый момент времени?
3. Что такое вес тела? В чем отличие веса тела от силы тяжести?
4. Как объяснить возникновение невесомости при свободном падении?
5. На какой высоте над планетой ускорение свободного падения вдвое меньше, чем на ее поверхности?
6. Как себя проявляют в механике упругие силы и силы трения?
7. Сформулируйте закон Гука для пружины и для стержня.
8. Что такое модуль Юнга? Коэффициент Пуассона?
9. Каков физический смысл модуля Юнга?
10. Дайте объяснение диаграммы напряжений. Что такое переделы пропорциональности, упругости и прочности?
11. Какова физическая сущность трения? В чем отличие сухого трения от жидкого?
12. Какие виды внешнего (сухого) трения вы знаете?
13. Предполагая, что на рисунке угол наклона возрастает до тех пор, пока брусок не начинает скользить, выведите соотношение между ускорением бруска и величинами: μ_s – статический коффициент трения, μ_d – динамический коэффициент трения и g – ускорение свободного падения. Исходя из рисунка и, зная, что $\mu_s = 0{,}3$, а $\mu_d = 0{,}2 + A\upsilon$, где $A = 2$ с/м, найдите:



а) чему равно начальное ускорение;

б) какова предельная скорость.

14. Автомобиль медленно съезжает с горы, имеющей уклон 30°. Он попадает на травяной участок, на котором $\mu_s = 0{,}5$ и $\mu_d = 0{,}48$. Начнет ли автомобиль скользить, и если да, то через какое время скорость скольжения достигнет 60 км/ч?

Примеры решения задач

Задача 4.1. К стальному стержню длиной 30 см и сечением 2 см^2 подвешен груз массой 3 т. Определите относительное удлинение стержня; энергию упругой деформации стержня. Модуль Юнга принять равным $2{,}2 \cdot 10^{11}$ Па.

Дано:
$l = 0{,}3$ м
$S = 2 \cdot 10^{-4}$ м^2
$m = 3 \cdot 10^3$ кг
$E = 2{,}2 \cdot 10^{11}$ Па
ε – ? $E_у$ – ?

Решение. Согласно закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где $\sigma = F/S$ – механическое напряжение, а F – упругая сила, по модулю равная силе тяжести $F = mg$.

Исходя из этого $\varepsilon = \dfrac{mg}{ES}$,

$$\varepsilon = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}{2{,}2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 6{,}69 \cdot 10^{-4}.$$

Энергия упругой деформации стержня равна работе деформирующей силы $<F>$ по удлинению стержня на Δl:

$$E_у = A = <F>\Delta l; \; <F> = \frac{0 + F}{2} = \frac{F}{2} = \frac{mg}{2}.$$

Абсолютное удлинение $\Delta l = \varepsilon l$. Тогда искомая энергия упругой деформации стержня:

$$E_у = \frac{mg}{2}\varepsilon l,$$

$$E_у = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}69 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}3}{2} = 2{,}95 \text{ Дж}.$$

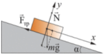
Ответ: $\varepsilon = 6{,}69 \cdot 10^{-4}$; $E_у = 2{,}95$ Дж.

Задача 4.2. Определите, за какое время тело, соскальзывая по наклонной плоскости, пройдет вторую половину пути, если угол наклона $\alpha = 30°$, коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0{,}5$, длина наклонной плоскости $s = 2{,}8$ м.

Дано:
$\alpha = 45°$
$\mu = 0{,}5$
$s = 2{,}8$ м
$s_2 = \dfrac{s}{2}$
t_2 – ?

Решение. Запишем второй закон Ньютона для тела, движущегося вдоль наклонной плоскости в векторном виде:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}, \quad (1)$$



где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{N}$ – сила нормальной реакции опоры, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения между телом и поверхностью.

Выбрав оси координат, как показано на рисунке, запишем уравнение (1) в проекциях на оси x и y:

$$x: ma = mg\sin\alpha - \mu N, \qquad (2)$$

$$y: 0 = N - mg\cos\alpha. \qquad (3)$$

Решая уравнения (2) и (3) совместно и учитывая, что сила трения $F_{тр} = \mu N$, получим выражение для ускорения:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Поскольку начальная скорость $v_{0x} = 0$, то $s = at^2/2$, отсюда время, затраченное для прохождения всей наклонной плоскости,

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}.$$

Для первой половины пути с учетом того, что $s_1 = s/2$,

$$s_1 = \frac{at_1^2}{2} \text{ и } t_1 = \sqrt{\frac{s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}.$$

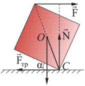
Искомое время

$$t_2 = t - t_1 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}.$$

Проверим размерность: $[t] = \sqrt{\frac{м}{м}с^2} = с$,

$$t_2 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{2{,}8}{9{,}81(0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}866)}} = 0{,}854 \text{ с.}$$

Ответ: $t_2 = 0{,}854$ с.



Задача 4.3. На рисунке изображен кубик, лежащий на шероховатой горизонтальной плоскости. Масса кубика m, коэффициент трения кубика о плоскость μ. Наша задача – опрокинуть его через ребро, прилагая горизонтально направленную $\vec{F}$. Найдем условие смещения кубика без проскальзывания.

Решение. На кубик действует сила $\vec{F}$, силы тяжести $m\vec{g}$ и реакции $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$. Из условия $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0$ находим $N = mg$, $F_{тр} = F$. Скольжение отсутствует при условии

$$F \le \mu N \text{ или } F \le \mu mg.$$

Найдем теперь область возможных значений величины силы F в зависимости от угла α между нижней гранью кубика и горизонтальной плоскостью. Приравняем к нулю сумму моментов сил относительно прямой, на которой лежит ребро кубика. Плечо силы тяжести $h_0 = R\cos(\alpha + \pi/4)$, плечо силы $\vec{F}$ равно $h = 2R\sin(\alpha + \pi/4)$, где $R = OC$. Из второго условия равновесия находим

$$-2R\sin(\alpha + \pi/4)F + R\cos(\alpha + \pi/4)mg = 0.$$

$$F = (mg/2)tg(\pi/4 - \alpha).$$

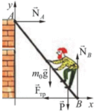
Величина F изменяется от значения $mg/2$ при $\alpha = 0$ до значения $F = 0$ при $\alpha = \pi/4$.

Следовательно, кубик можно «кантовать» при условии $\mu \ge 1/2$.

А теперь попытаемся перевернуть через ребро призму, имеющую в сечении правильный $2n$-угольник. К ребру верхней грани приложим горизонтально направленную силу $\vec{F}$.

Покажите, что в этом случае $F = (mg/2)\mathrm{tg}(\pi/2n - \alpha)$. Условие «качения» призмы приобретает вид $\mu \ge (1/2)tg(\pi/2n)$. При увеличении числа граней величина силы F уменьшается и условия качения становятся менее жесткими.

Задача 4.4. ***Как не упасть с лестницы.*** Лестница AB массой m_0 упирается в гладкую стену и опирается на шероховатый пол. Под каким наименьшим углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней до самого верха мог подняться человек массой m? Коэффициент трения скольжения лестницы о пол равен μ.



Решение. Изобразим лестницу (рис.), примем её за стержень длиной l, изобразим приложенные к нему силы. Со стороны стены на лестницу действует реакция $\vec{N}_A$, со стороны пола – реакция $\vec{N}_B$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. При скольжении лестницы $F_{тр} = \mu N_B$. Очевидно, лестница не будет скользить при условии

$$F_{тр} \le \mu N_B. \tag{1}$$

Сила тяжести $m_0\vec{g}$ приложена в середине лестницы. Со стороны человека, стоящего на расстоянии s от конца B лестницы, действует сила давления, равная весу человека $\vec{P} = m\vec{g}$.

Выберем два взаимно перпендикулярных направления по горизонтали и вертикали (оси x и y). Тогда первое условие равновесия имеет вид

$$-m_0g - mg + N_B = 0, \tag{2}$$

$$N_A - F_{тр} = 0. \tag{3}$$

Запишем далее второе условие равновесия – приравняем нулю сумму моментов сил относительно оси, проходящей через точку B (в этом случае моменты сил $F_{тр}$ и N_B равны нулю):

$$mgs\cos\alpha + m_0 g(l/2)\cos\alpha - N_A \sin\alpha = 0. \qquad (4)$$

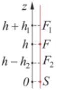
Из уравнений (3) и (4) получим

$$F_{тр} = \left(\frac{1}{2}m_0 + \frac{s}{l}m\right)g\mathrm{ctg}\alpha. \qquad (5)$$

Подставляя $F_{тр}$ и N_B из (1) в (2), находим, что человек может подняться наверх ($s = l$), если угол α удовлетворяет условию

$$\mathrm{tg}\alpha \geq \frac{2m + m_0}{2\mu(m + m_0)}.$$

Задача* 4.5. Альпинист на вертикальной стене. На рисунке показаны этапы прохождения стенки связкой – двойкой. Веревка закреплена в точке S. Лидер с рюкзаком общей массой m = 100 кг поднялся на скалу высотой h относительно напарника S, забил в точке страховки F крюк, подвернул веревку через карабин и поднялся еще на расстояние h_1. Длина веревки в этом положении $l_0 = h + h_1$, $h = 5$ м, $h_1 = 3$ м. При срыве лидер падает до точки F_2, в которой скорость равна нулю. Качество веревки задается «модулем веревки» $f = kl_0$, где k – коэффициент жесткости веревки, f = 40 кН. Найдите удлинение веревки $\Delta l = l_2 - l_0$ ($l_2 = h + h_2$ – длина веревки в положении F_2) и величину силы $F = k\Delta l, (k = f/l_0)$, действующей на лидера со стороны веревки в точке F_2.



Решение. Выберем начало оси z в точке S. Потенциальная энергия альпиниста $W(z) = mgz + k(l - l_0)^2/2$, где l – длина веревки, $k = f/l_0$. Для оценок трением отдельных нитей веревки друг о друга пренебречь. Тогда полные энергии груза в положениях $z = l_0$ и $z = l_2$ одинаковы. Из закона сохранения полной энергии получим уравнение

$$0 + mgl_0 + 0 = 0 + mg(h - h_2) + k(l_2 - l_0)^2/2. \qquad (1)$$

Удлинение веревки $\Delta l = h_2 - h_1, l_2 = l_0 + \Delta l, h - h_2 = 2h - l_0 - \Delta l$. Из уравнения (1) получим:

$$k(\Delta l)^2 - 2mg[\Delta l + 2(l_0 - h)] = 0,$$

отсюда находим

$$k\Delta l = mg\left(1 + \sqrt{1 + 2f\varepsilon_0/mg}\right),$$

где $\varepsilon_0 = 2(l_k - h)/l_k$ – фактор падения, $2(l_0 - h)$ – «потеря» высоты. Полагая $\varepsilon_k = 1{,}6$, получим удлинение веревки $\Delta l = 2{,}42$ м, относительное удлинение $\Delta l/l_0 = 0{,}3$. Величина силы, действующей на альпиниста со стороны веревки, $F = 12{,}18$ кН. Однако максимальное значение усиления, которое может выдержать тело человека, $F_{max} = 5$ кН. Наиболее серьезное падение с фактором $\varepsilon_0 = 2$: высота падения равна удвоенной длине веревки. В этом случае $\Delta l/l_k = 0{,}34$, $F = 13{,}4$кН. Из второго закона Ньютона $ma_2 = -mg + k(l_2 - l_0)$ получим $a_2 = 12{,}71g$.

Современная альпинистская веревка содержит сердцевину с модулем f_1 при удлинении $\Delta l_1 = l_1 - l_0$ и модулем $f_2 < f_1$ при дальнейшем удлинении $\Delta l_2 = l_2 - l_0$. Такая веревка позволяет получить приемлемое значение величины силы $F = k_2 \Delta l_2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. К пружине жесткостью 500 Н/кг подвесили груз массой 1 кг, при этом длина пружины стала 0,12 м. До какой длины растянется пружина, если к ней подвесить еще один груз массой 1 кг?

Ответ: $l_2 = \dfrac{m_2 g}{k} + l_0 = 0{,}14$ м.

Задача 4.2. К резиновому шнуру прикреплен шарик массой $m = 50$ г. Длина шнура в нерастянутом состоянии $l = 30$ см. Известно, что под влиянием силы, равной $F = 9{,}8$ Н, шнур растянется на $\Delta l = 1$ см. Считая растяжение шнура пропорциональным приложенной силе, определите, на сколько удлинится шнур при вращении шарика со скоростью $n = 180$ об/мин.

Ответ: $\Delta l_1 = \dfrac{4m\pi^2 n^2 l}{k - 4m\pi^2 n^2} = 5{,}5$ мм.

Задача 4.3. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса человека $M = 60$ кг, масса доски $m = 20$ г. С какой скоростью υ (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль доски со скоростью (относительно доски) $u = 1$ м/с? Массой колес пренебречь. Трение во втулках не учитывать.

Ответ: $\upsilon = -\dfrac{M}{M + m} u = -0{,}75$ м/с.

Задача 4.4. Грузовик, привязанный к шнуру длиной l = 50 см, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Какой угол φ образует шнур с вертикалью, если частота вращения $n = 1\ c^{-1}$?

Ответ: $\varphi = \arccos\dfrac{g}{4\pi^2 n^2 l} = 60{,}2°$.

Задача 4.5. При насадке маховика на ось центр тяжести оказался на расстоянии r = 0,1 мм от оси вращения. В каких пределах меняется сила F давления оси на подшипники, если частота вращения маховика $n = 10\ c^{-1}$? Масса m маховика равна 100 кг.

Ответ: $F = m(g \pm 4\pi^2 n^2 r)$; F_{max} = 1,02 кН; F_{min} = 942 Н.

Задача 4.6. Автомобиль идет по закруглению шоссе, радиус R кривизны которого равен 200 м. Коэффициент трения μ колес с покрытием дороги равен 0,1 (гололед). При какой скорости υ автомобиля начнется его занос?

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\mu g R} = 14$ м/с.

Задача 4.7. Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь s = 5 м и приобрела скорость υ = 2 м/с. Определить работу A силы, если масса m вагонетки равна 400 кг и коэффициент трения μ = 0,01.

Ответ: $A = \mu gms + m\upsilon^2/2 = 996$ Дж.

Задача 4.8. Вычислить работу A, совершенную при равноускоренном подъеме груза массой m = 100 кг на высоту h = 4 м за время t = 2 с.

Ответ: $A = mh(g + 2h/t^2) = 4{,}72$ кДж.

Задача* 4.9. Футбольный мяч при движении в воздухе испытывает силу сопротивления, пропорциональную квадрату скорости мяча относительно воздуха. Перед ударом футболиста мяч двигался в воздухе горизонтально со скоростью υ_1 = 20 м/с и ускорением a_1 = 13 м/с^2. После удара мяч полетел вертикально вверх со скоростью υ_2 = 10 м/с. Каково ускорение a_2 мяча сразу после удара?

Ответ: $a_2 = \left(\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^2 \sqrt{a_1^2 - g^2} + g = 12$ м/с^2.

Задача 4.10. Работа, затраченная на толкание ядра, брошенного под углом 15° к горизонту, равна 800 Дж. Масса ядра 8 кг. На каком расстоянии от места бросания ядро упадет на Землю?

Ответ: $s = \dfrac{2A\sin 2\alpha}{mg} = 10$ м.

Задача* 4.11. Конькобежец массой $m = 45$ кг, находящийся в начале ледяной горки с углом наклона 10°, бросает в горизонтальном, противоположном от горки направлении, камень массой $m = 5$ кг со скоростью $v = 18$ м/с. На какое расстояние вдоль горки поднимется конькобежец, если известно, что коэффициент трения лезвий коньков о лед равен 0,02? Принять $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $s = \dfrac{(m_2 v_2)^2}{2m_1^2 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 1{,}03$ м.

Задача 4.12. Через невесомый блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы массами 1 кг и 2 кг. На второй из грузов положен перегрузок массой 0,5 кг. С какой силой будет действовать этот перегрузок на тело, на котором он лежит, если вся система придет в движение?

Ответ: $F = \dfrac{2m_1 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}8$ Н.

Задача* 4.13. К грузу массой 7 кг подвешен на веревке груз массой 5 кг. Определите модуль силы натяжения середины веревки, если всю систему поднимать вертикально с силой 240 Н, приложенной к большему грузу. Веревка однородна и ее масса равна 4 кг.

Ответ: $T = \dfrac{F \cdot m''}{m' + m''} = \dfrac{240 \cdot 7}{9 + 7} = 105$ Н.

Задача 4.14. С горки высотой 2 м и основанием 5 м съезжают санки, которые затем останавливаются, пройдя по горизонтали путь 35 м от основания горки. Найдите коэффициент трения. Считать коэффициент трения на наклонном и горизонтальном участках одинаковым.

Ответ: $\mu = \dfrac{h}{x + s} = 0{,}05$.

Задача 4.15. По поверхности льда пущена шайба, которая, пройдя путь $S = 400$ м, остановилась через $t = 40$ с. Определите коэффициент трения μ шайбы об лед.

Ответ: $\mu = \dfrac{2S}{gt^2} = 0{,}05$.

Задача 4.16. После включения тормозной системы тепловоз массой $m = 100$ т прошел путь $S = 200$ м до полной остановки за время $t = 40$ с. Определите силу торможения.

Ответ: $F = m\dfrac{2S}{t^2} = 25$ кН.

Задача 4.17. При выключении двигателя автомобиль, движущийся со скоростью $\upsilon = 54$ км/ч, проехал по инерции 100 м. Определите коэффициент трения автомобиля о поверхность дороги.

Ответ: $\mu = \dfrac{\upsilon^2}{2gS} = 0{,}38$.

Задача 4.18. Поезд массой m = 150 т двигался со скоростью υ = 72 км/ч. При торможении до полной остановки поезд прошел путь S = 500 м. Определите силу сопротивления движению.

Ответ: $F = m\dfrac{\upsilon^2}{2S} = 60$ кН.

Задача 4.19. Пущенная по поверхности льда шайба со скоростью υ = 30 м/с остановилась через время t = 50 с. Определите силу сопротивления движению и коэффициент трения μ, если масса шайбы m = 500 г.

Ответ: $F = m\dfrac{\upsilon}{t} = 0{,}34$ Н; $\mu = \dfrac{\upsilon}{gt} = 0{,}06$.

Задача 4.20. Определите показания пружинных весов с подвешенной гирей массой $m = 8$ кг в опускающемся лифте при торможении с ускорением $a = 2\ м/с^2$; при разгоне с тем же ускорением.

Ответ: $P_1 = m(g + a) = 94{,}5$ Н; $P_2 = m(g - a) = 62{,}5$ Н.

Задача* 4.21. Во время вертикального взлета с Луны за первые 10 с ракета проходит расстояние 2 км. Найдите вес космонавта массой 90 кг. Масса луны $7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны 1740 км.

Ответ: $P = m\left(G\dfrac{M_Л}{R_Л^2} + \dfrac{2s}{t^2}\right) = 3{,}75$ кН.

Задача* 4.22. Определите минимальный коэффициент трения μ, при котором лестница может стоять у стены под углом к горизонту $\alpha = 45^\circ$ и не проскальзывать. Коэффициенты трения между лестницей и полом и между лестницей и стеной равны.

Ответ: $\mu_{min} = -tg\alpha + \sqrt{tg^2\alpha + 1} = 0{,}41$.

Когда кончился бензин, автомобиль вынужден был остановиться. Это я тоже сам вчера видел. А после этого еще болтают об инерции, господа! Не едет, стоит, с места не трогается! Нет бензина. Ну не смешно ли?

Я. Гашек.
Похождения бравого солдата Швейка

ГЛАВА 5. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Как уже отмечалось, законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются неинерциальными. В принципе использование неинерциальных систем отсчета ничем не запрещено. Надо только соответствующим образом подправить законы динамики.

5.1. Уравнение Ньютона для неинерциальных систем отсчета

Законы инерции выполняются в инерциальной системе отсчета. А как описать движение тела в неинерциальной системе?

Рассмотрим пример: вы стоите в троллейбусе спокойно. Вдруг троллейбус резко трогается, и вы невольно отклонитесь назад. Что произошло? Кто вас толкнул?

С точки зрения наблюдателя на Земле (в инерциальной системе отсчета), в тот момент, когда троллейбус тронулся, вы остались стоять на месте – в соответствии с первым законом Ньютона.

С точки зрения сидящего в троллейбусе – вы начали двигаться назад, как если бы кто-нибудь вас толкнул. На самом деле, никто не толкнул, просто ваши ноги, связанные силами трения с троллейбусом «поехали» вперед из-под вас и вам пришлось падать назад.

Можно описать ваше движение в инерционной системе отсчета. Но это не всегда просто, так как обязательно нужно вводить силы, действующие со стороны *связей*. А они могут быть самыми разными и ведут себя по-разному – нет единого подхода к их описанию.

А можно и в неинерциальной системе воспользоваться законами Ньютона, если ввести *силы инерции*. Они *фиктивные*. Нет тела или поля, под действием которого вы начали двигаться в троллейбусе. Силы инерции вводят специально, чтобы воспользоваться уравнениями Ньютона в неинерциальной системе.

Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. На силы инерции законы Ньютона не распространяются.

Найдем количественное выражение для силы инерции при *поступательном движении* неинерциальной системы отсчета.

Введем обозначения:

$\vec{a}'$ – ускорение тела массой m относительно неинерциальной системы;

$\vec{a}^{*}$ – ускорение неинерциальной системы относительно инерциальной (относительно Земли).

Тогда ускорение тела относительно инерциальной системы

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}^{*}. \tag{5.1.1}$$

Ускорение в инерциальной системе можно выразить через второй закон Ньютона:

$$\vec{F}/m = \vec{a}' + \vec{a}^{*}, \text{ отсюда } \vec{a}' = \vec{F}/m - \vec{a}^{*}.$$

Мы можем и $\vec{a}^{*}$ представить в соответствии с законом Ньютона (формально):

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{F}_{ин}}{m},$$

где $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}^{*}$ – сила, направленная в сторону, противоположную ускорению неинерциальной системы. Тогда получим

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин} \tag{5.1.2}$$

– *уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета.*

Здесь $\vec{F}_{ин}$ – фиктивная сила, обусловленная свойствами системы отсчета, необходимая нам для того, чтобы иметь возможность описывать движения тел в неинерциальных системах отсчета с помощью уравнений Ньютона.

Силы инерции не инвариантны относительно перехода из одной системы отсчета в другую. Они не подчиняются закону действия и противодействия. Движение тела под действием сил инерции аналогично движению во внешнем силовом поле. Силы инерции всегда являются внешними по отношению к любому движению системы материальных тел.

5.2. Центростремительная и центробежная силы

Рассмотрим вращение камня массой m на веревке (рис. 5.1).

В каждый момент времени камень должен был бы двигаться прямолинейно по касательной к окружности. Однако он связан с осью вращения веревкой. Веревка растягивается, появляется упругая сила, действующая на камень, направленная вдоль веревки к центру вращения. Это и есть ***центростремительная сила*** (при вращении Земли вокруг оси в качестве центростремительной силы выступает сила гравитации).

$\vec{F}_{цс} = m\vec{a}_{цс}$, но т. к. $\vec{a}_{цс} = \vec{a}_n = \upsilon^2/R$, то

$$\vec{F}_{цс} = m\vec{a}_n, \text{ или } F_{цс} = m\upsilon^2/R. \qquad (5.2.1)$$

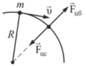


Рис. 5.1. Вращение камня массой m на веревке длиной R: $\vec{F}_{цс}$ *приложена к камню и направлена к центру вращения;* $\vec{F}_{цб}$ *приложена к связи и направлена от центра*

Центростремительная сила возникла в результате действия камня на веревку, т. е. это сила, приложенная к телу, – *сила инерции второго рода.* Она фиктивна – ее нет.

Сила же, приложенная к связи и направленная по радиусу от центра, называется ***центробежной.***

Центростремительная сила приложена к вращающемуся телу, а центробежная сила – к связи.

Центробежная сила – сила инерции первого рода. Центробежной силы, приложенной к вращающемуся телу, не существует.

С точки зрения наблюдателя, связанного с неинерциальной системой отсчета, он не приближается к центру, хотя видит, что $F_{цс}$ действует (об этом можно судить по показанию пружинного динамометра). Следовательно, с точки зрения наблюдателя в неинерциальной системе есть сила, уравновешивающая $F_{цс}$, равная ей по величине и противоположная по направлению:

$$\vec{F}_{цб} = -m\vec{a}_n \text{ или } F_{цб} = -m\upsilon^2/R.$$

Так как $a_n = \omega^2 R$ (здесь ω – угловая скорость вращения камня, а υ – линейная), то

$$F_{цб} = m\omega^2 R. \qquad (5.2.2)$$

5.3. Вклад вращения Земли в ускорение свободного падения

Все мы (и физические приборы тоже) находимся на Земле, вращающейся вокруг своей оси, следовательно – в неинерциальной системе (рис 5.2). Из рисунка видно, что ускорение свободного падения и сила тяжести зависят от широты местности φ.

В тех случаях, когда требуется исследовать движение тел относительно земной поверхности с достаточно высокой точностью, необходимо учитывать действие сил инерции, вызванных вращением Земли вокруг своей оси.

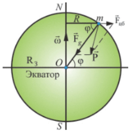


Рис. 5.2. К определению зависимости ускорения свободного падения g и силы тяжести от широты местности φ

Сила тяжести $\vec{P}$ есть результат сложения двух сил: $F_g = mg$ и $F_{цб} = m\omega^2 R$.

$$\vec{P} = \vec{F}_g + \vec{F}_{цб}. \tag{5.3.1}$$

Практически наблюдаемое значение g' пропорционально силе тяжести $P = mg'$. Таким образом P *зависит от широты местности*.

Расстояние R от рассматриваемого тела до оси вращения Земли является функцией географической широты φ:

$$R = R_З \cos\varphi,$$

$$F_{цб} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_З \cos\varphi,$$

где ω – угловая скорость вращения Земли.

Возведем уравнение (4.5.5) в квадрат. Подставив полученное таким образом равенство выражения для модулей сил, после несложных преобразований, приведем к формуле:

$$g' = \sqrt{g^2 - 2g\omega^2 R_0 \cos\varphi + \omega^4 R_0^2 \cos^2\varphi},$$

которая определяет зависимость ускорения g' свободного падения от широты φ. Согласно этой формуле, наибольшее значение,

$$g'_{\max} = g,$$

ускорение свободного падения принимает на полюсах Земли ($g'_{\max} \approx 9{,}83$), а наименьшее – на экваторе, при $\varphi = 0$

$$g'_{\min} = g - \omega^2 R_З.$$

На экваторе вес тела $P \approx m(g - \omega^2 R_З)$ на 0,3 % меньше, чем на полюсах, в результате вращения Земли.

Если бы Земля вращалась с угловой скоростью $\omega = \sqrt{g/a}$, то на экваторе тела бы находились в состоянии невесомости. Тогда линейная скорость тел была бы равна первой космической скорости υ_1.

Прямая линия, вдоль которой направлена нить с подвешенным на ней покоящемся телом, называется *вертикалью*, или *линией отвеса.* Направление силы тяжести $\vec{P} = m\vec{g}'$ совпадает с вертикальным направлением. Поэтому прямая, проходящая через центр Земли и какую-либо точку на ее поверхности, вообще говоря, не совпадает с линией отвеса в этой точке. Вертикаль направлена к центру Земли только в полюсах, где центробежная сила равна нулю, и на экваторе, где эта сила коллинеарна силе тяготения.

Вклад в ускорение свободного падения вносит также и Луна. Вклад Луны в ускорение свободного падения разобран в задаче 8.3.

5.4. Сила Кориолиса

Земля – дважды неинерциальная система отсчета, поскольку она движется вокруг Солнца и вращается вокруг своей оси. На тела неподвижные, как было показано в 5.2, действует лишь центробежная сила. В 1829 г. французский физик Г. Кориолис[18] показал, что *на движущееся тело* действует еще одна сила инерции. Её называют ***силой Кориолиса***. Эта сила всегда перпендикулярна оси вращения и направлению скорости υ.

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмем горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую *OA* (рис. 5.3).

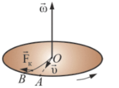


Рис. 5.3. К определению силы Кориолиса

Запустим в направлении от *O* к *A* шарик со скоростью $\vec{\upsilon}$. Если диск не вращается, шарик должен катиться вдоль *OA*. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по кривой *OB*, причем его скорость относительно диска быстро изменяет свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила $\vec{F}_к$, перпендикулярная направлению движения шарика.

Сила Кориолиса не является «настоящей» в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальной системы отсчета такая сила вообще не существует. Она вводится искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета.

Чтобы заставить шарик катиться вдоль *OA*, нужно сделать направляющую, выполненную в виде ребра. При качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой. Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно объяснить тем, что эта сила уравновешивается приложенной к шарику силой инерции

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}], \tag{5.4.1}$$

здесь $\vec{F}_k$ – *сила Кориолиса*[**], также являющаяся силой инерции; $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения диска.

Сила Кориолиса вызывает *кориолисово ускорение*. Выражение для этого ускорения имеет вид

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}]. \tag{5.4.2}$$

Ускорение направлено перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{\upsilon}$ и максимально, если относительная скорость точки $\vec{\upsilon}$ ортогональна угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения подвижной системы отсчета. Кориолисово ускорение равно нулю, если угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\upsilon}$ равен нулю или π либо если хотя бы один из этих векторов равен нулю.

Следовательно, в общем случае, при использовании уравнений Ньютона во вращающейся системе отсчета, возникает необходимость учитывать центробежную, центростремительную силы инерции, а также кориолисову силу.

Таким образом, $\vec{F}_k$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Сила Кориолиса возникает только в случае, когда тело изменяет свое положение по отношению к вращающейся системе отсчета.

Влияние кориолисовых сил необходимо учитывать в ряде случаев при движении тел относительно земной поверхности. Например, при свободном падении тел на них действует кориолисова сила, обусловливающая отклонение к востоку от линии отвеса. Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах. Летящий снаряд также испытывает отклонения, обусловленные кориолисовыми силами инерции. Например, при выстреле из орудия, направленного на север, снаряд будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу – в южном.

[**] Вывод формулы для расчета силы Кориолиса можно посмотреть на примере задачи 5.1.

При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведен в восточном направлении.

Возникновение некоторых циклонов в атмосфере Земли происходит в результате действия силы Кориолиса. В северном полушарии все устремляющиеся к месту пониженного давления воздушные потоки отклоняются вправо по своему движению.

Сила Кориолиса действует на тело, *движущееся вдоль меридиана, в северном полушарии вправо и в южном влево* (рис. 5.4).

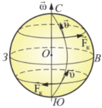


Рис. 5.4. Действие силы Кориолиса на тело, движущееся вдоль меридиана в северном полушарии вправо, в южном влево

Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в северном полушарии и левый в южном. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов железнодорожных путей.

Силы Кориолиса проявляются и при качаниях маятника.

В 1851 г. французский физик Ж. Фуко[19] установил в Пантеоне Парижа маятник массой 28 кг на тросе длиной 67 м (маятник Фуко). Такой же маятник массой 54 кг на тросе длиной 98 м недавно, к сожалению, был демонтирован в Исаакиевском соборе Санкт-Петербурга в связи с передачей собора в собственность церкви.

Для простоты предположим, что маятник расположен на полюсе (рис. 5.5). На северном полюсе сила Кориолиса будет направлена вправо по ходу маятника. В итоге траектория движения маятника будет иметь вид розетки.

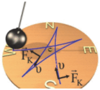


Рис. 5.5. Влияние силы Кориолиса на отклонение маятника Фуко

Как следует из рисунка, плоскость качаний маятника поворачивается относительно Земли в направлении часовой стрелки, причем за сутки она совершает один оборот. Относительно гелиоцентрической системы отсчета дело обстоит так: плоскость качаний остается неизменной, а Земля поворачивается относительно нее, делая за сутки один оборот.

Таким образом, вращение плоскости качаний маятника Фуко дает непосредственное доказательство вращения Земли вокруг своей оси.

Если тело удаляется от оси вращения, то сила $F_к$ направлена противоположно вращению и замедляет его.

Если тело приближается к оси вращения, то $F_к$ направлена в сторону вращения.

С учетом всех сил инерции уравнение Ньютона для неинерциальной системы отсчета (5.1.2) примет вид

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{и} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{к}, \qquad (5.4.3)$$

где $\vec{F}_{и} = -m\vec{a}$ – сила инерции, обусловленная поступательным движением неинерциальной системы отсчета;

$\vec{F}_{цб} = m\vec{a}_n$ и $\vec{F}_{к} = 2m[\vec{\upsilon},\vec{\omega}]$ – две силы инерции, обусловленные вращательным движением системы отсчета;

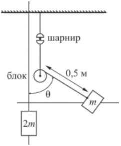
$\vec{a}'$ – ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Когда и почему необходимо рассматривать силы инерции?
2. Что такое силы инерции? Чем они отличаются от сил, действующих в инерциальных системах отсчета?
3. Запишите уравнение Ньютона для неинерциальной системы с учетом всех сил инерции.
4. Какую систему отсчета называют инерциальной-неинерциальной?
5. Какая физическая величина характеризует инертность тел?
6. В чем проявляется инертность тел?
7. Как изменяется сила притяжения в зависимости от расстояния до центра Земли? В каких точках Земли сила тяготения равна силе тяжести?
8. В каких точках Земли наблюдается наибольшая разность между силой тяготения и силой тяжести?
9. К каким последствиям привело бы внезапное исчезновение силы тяготения?
10. Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса? Когда они проявляются?

11. В северном полушарии производится выстрел вдоль меридиана на север. Как скажется на движении снаряда суточное вращение Земли?

12. Самолет, двигаясь со скоростью υ, совершает в вертикальной плоскости мертвую петлю радиусом r. Как направлена сила реакции опоры в нижней точке; в верхней точке; нормальное (центростремительное) ускорение в нижней точке траектории; в верхней точке траектории?



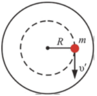
13. Тело массой m движется по окружности в плоскости xz (блок вращается с телом массой m). Тело массой $2m$ находится на оси вращения (см. рис.). Пренебрегая массой нити и блока, а также трением в блоке, найдите период обращения тела массой m. Чему равен угол θ?

Примеры решения задач

Задача* 5.1. Сила Кориолиса. Найти силу, действующую на частицу массой m относительно системы отсчета, вращающейся по окружности радиуса R, лежащей в плоскости перпендикулярной к оси вращения. Частица привязана к оси вращения нитью. Скорость частицы относительно вращающейся системы равна υ'. Угловая скорость вращения ω.

Дано:
m
υ'
ω
F_K – ?

Решение. Скорость частицы относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета $\upsilon = \upsilon' + \omega R$. Для того, чтобы частица двигалась относительно неподвижной системы по окружности, на неё должна действовать сила, направленная к центру – сила натяжения нити F. Величина этой силы равна:



$$F = ma_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = \frac{m(\upsilon' + \omega R)^2}{R} = \frac{m\upsilon'^2}{R} + 2m\upsilon'\omega + m\omega^2 R.$$

Ускорение тела относительно диска $a' = \upsilon'^2 / R$.

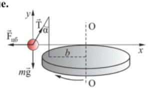
Тогда сила натяжения нити $F = ma'_n + m\omega^2 R + 2m\upsilon'\omega$,

отсюда $ma'_n = F - m\omega^2 R - 2m\omega\upsilon'$.

Таким образом, во вращающейся системе частица ведет себя так, как если бы на нее, кроме центробежной силы $F_{цб} = m\omega^2 R$, действовала еще и $F_K = 2m\upsilon'\omega$ – кориолисова сила инерции.

В векторной форме сила Кориолиса: $\vec{F}_К = 2m[\vec{\upsilon}', \vec{\omega}]$.

Задача 5.2. Вертикальный стержень укреплен на вращающемся в горизонтальной плоскости с частотой n = 1 с$^{-1}$ столике. К вершине стержня привязана нить длиной l = 10 см с шариком (см. рис.). Определить расстояние b от стержня до оси вращения, если угол, который составит нить с вертикалью, α = 30°.

Дано:	**Решение.**
$n = 1$ с$^{-1}$ $l = 0{,}1$ м $\alpha = 30°$	
b – ?	

Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся столиком. В этой системе отсчета на шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжении нити $\vec{T}$ и центробежная сила $\vec{F}_{цб}$, направленная по радиусу от оси вращения (рис).

Поскольку шарик неподвижен в системе отсчета, связанной с вращающимся столиком, его ускорение $\vec{a}' = 0$, и II закон Ньютона в векторном виде запишем так:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{цб} = 0.$$

Это уравнение в проекции на выбранные оси имеет вид:

$$\text{ось } x\text{: } T\sin\alpha - \frac{m\upsilon^2}{R} = 0, \text{ где } R = l\sin\alpha + b,$$

$$\text{ось } y\text{: } T\cos\alpha - mg = 0.$$

Используя эти уравнения, получим:

$$g\,\mathrm{tg}\alpha = \upsilon^2/R = 4\pi^2 n^2 (b + l\sin\alpha),$$

при этом необходимо учесть, что $\upsilon = \omega R = 2\pi n R$ и $R = b + l\sin\alpha$, где R – расстояние от центра отклоненного шарика до оси вращения; $\omega = 2\pi n$ – угловая скорость. Из этого уравнение получаем искомое расстояние от стержня до оси вращения:

$$b = \frac{g\,\mathrm{tg}\alpha}{4\pi^2 n^2} - l\sin\alpha, \quad [b] = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{с}^{-2}} - \text{м}\right] = \text{м},$$

$$b = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}577}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1^2} - 0{,}05 = 0{,}094 \text{ м}.$$

Ответ: $b = 0{,}094$ м.

Задача 5.3. С какой скоростью движется автомобиль по выпуклому мосту радиусом кривизны $R = 80$ м, если в верхней точке сила его давления на мосту уменьшается вдвое по сравнению с движением по горизонтальному участку пути?

Дано:
$R = 80$ м
$N_1 = \dfrac{N_2}{2}$

$\upsilon - ?$

Решение. Направим ось x к центру кривизны траектории, запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

$$ma_n = mg - N_1.$$

На горизонтальном участке пути сила давления на поверхность $N_2 = mg$, следовательно $N_1 = mg/2$ или

$$mg - N_1 = \frac{m\upsilon^2}{R}, \qquad (1)$$

учли, что $a_n = \dfrac{m\upsilon^2}{R}$. Воспользовавшись полученным соотношением $N_1 = mg/2$, запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = mg - \frac{1}{2}mg,$$

откуда искомая скорость автомобиля $\upsilon = \sqrt{\dfrac{Rg}{2}}$.

Проверим размерность: $[\upsilon] = \sqrt{\dfrac{\text{ì}\cdot\text{ì}}{\text{ñ}^2}} = \text{ì}/\text{ñ}$.

Вычисления: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{80\cdot 9{,}81}{2}} = 19{,}8$ м/с.

Ответ: $\upsilon = 19{,}8$ м/с.

Задача 5.4. Поезд массой $m = 3000$ т движется на северной широте $\varphi = 30$ °. С какой боковой силой давит рельсы на колеса поезда, если скорость поезда $\upsilon = 60$ км/ч и направлена вдоль меридиана? В каком направлении и с какой скоростью должен двигаться поезд, чтобы сила бокового давления была равна нулю?

Дано:
$m = 3\cdot 10^6$ кг
$\varphi = 30°$
а) $\upsilon = 17$ м/с
б) $R = 0$

а) $F - ?$ б) $\upsilon - ?$

Решение. а) Боковое давление поезда на рельс обусловлено силой Кориолиса. Оно действует на правый (по ходу поезда) рельс независимо от того, движется поезд на север или на юг.

То есть $F_{бок} = F_{кор} = 2m\omega\upsilon\sin\varphi$;

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\ T = 24\text{ ч} = 86400\text{ с};$$

$$F_{бок} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 17 \cdot \sin 30^\circ}{86400} = 3{,}71 \text{ кН};$$

б) Сила бокового давления равна 0, когда сила Кориолиса направлена противоположно $F_{уб}$. Это происходит, когда поезд движется по параллели с востока на запад.

$$F_{уб} = F_{кор},$$

$$m\omega^2 r = 2m\omega\upsilon, \text{ отсюда } r = R\cos\varphi.$$

$$\omega R\cos\varphi = 2\upsilon, \text{ отсюда } \upsilon = \frac{\omega R\cos\varphi}{2},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \upsilon = \frac{\pi R\cos\varphi}{T};$$

$$\upsilon = \frac{3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 10^3 \cdot \cos 30^\circ}{24} = 722 \text{ км/ч}.$$

Ответ: а) $F_{бок} = 3{,}71$ кН; б) $\upsilon = 722$ км/ч.

Задача 5.6 Небольшое тело поместили на вершину гладкого шара радиусом R. Затем шару сообщили в горизонтальном направлении постоянное ускорение a_0, и тело начало скользить вниз. Найти скорость тела относительно шара в момент отрыва.

Дано:
a_0
R
υ – ?

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с шаром. В этой системе отсчета в начальный момент времени

$$\upsilon_0 = 0.$$

По закону сохранения энергии $mg(R - R\cos\alpha) = m\upsilon^2/2$.

$$m\upsilon^2 = mgR\cos\alpha; \quad 2mgR - 2mgR\cos\alpha = m\upsilon^2;$$

$$2mgR = 3mgR\cos\alpha, \text{ отсюда } \cos\alpha = \frac{2}{3}.$$

$$\upsilon = \sqrt{gR\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}gR}.$$

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.1. Центробежная стиральная машина наполнена мокрым бельем и вращается со скоростью 1200 об/мин. Во сколько раз центростремительная сила к моменту отрыва капли воды от ткани больше веса капли, если капля находится на расстоянии 0,3 м от оси вращения?

Ответ: $F_ц / F_{тяж} = 483$.

Задача 5.2. В вертикальной плоскости вращается груз весом 20 Н с частотой 2 об/с. Шнур, на котором подвешен груз, может выдержать нагрузку 320 Н. Выдержит ли шнур натяжения в те моменты, когда груз проходит через высшую и низшую точки окружности? Определите максимальную и минимальную силы натяжения шнура, если его длина равна 1 м.

Ответ: $F_{max} = 368{,}6$ Н; $F_{min} = 328{,}6$ Н.

Задача 5.3. Поезд движется по закруглению радиусом 500 м. Ширина железнодорожной колеи 152,4 см. Наружный рельс расположен на 12 см выше внутреннего. При какой скорости движения поезда на закруглении колеса не оказывают давления на рельсы?

Ответ: $\upsilon = 19{,}64$ м/с.

Задача 5.4. Платформа движется по закруглению с линейной скоростью v. Шарик, подвешенный на нити на этой платформе, отклонится на угол α. Определите радиус закругления.

Ответ: $R = \dfrac{\upsilon^2}{g\mathrm{tg}\alpha}$.

Задача 5.5. Какова должна быть скорость движения мотоциклиста, чтобы он мог описывать горизонтальную окружность на внутренней поверхности вертикального кругового цилиндра радиусом r, если при езде по горизонтальной поверхности с таким же коэффициентом трения скольжения минимальный радиус поворота при скорости v_1 равен R?

Ответ: $\upsilon \geq \dfrac{g}{\upsilon_1}\sqrt{Rr}$.

Задача 5.6. Груз, подвешенный к невесомой нити, описывает горизонтальную окружность с постоянной скоростью (конический маятник). Расстояние от точки подвеса до центра окружности равно h. Определите число оборотов маятника за 1 с.

Ответ: $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{h}}$.

Задача 5.7. Определите наименьший радиус R круга, по которому сможет проехать велосипедист со скоростью $\upsilon = 30$ км/ч, если коэффициент трения скольжения между колесами и землей $\mu = 0{,}25$. Определите также наибольший угол φ наклона велосипеда, при котором велосипедист еще не будет падать.

Ответ: $R = \dfrac{\upsilon^2}{\mu g} = 27{,}8$ м; $\varphi = \mathrm{arctg}\,\mu = 14^\circ$.

Задача 5.8. Спутник движется по орбите так, что он все время находится над одной и той же точкой экватора и той же высоте. Каково расстояние от такого спутника до центра Земли? Масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, гравитационная постоянная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $Н \cdot м^2/кг^2$. Ответ представьте в мегаметрах и округлите до целого числа.

Ответ: $r = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}} = 42 \cdot 10^6$ м.

Задача 5.9. На сколько следует приподнять наружный рельс по отношению к внутреннему на закруглении пути при скорости движения поезда 54 км/ч и радиусе кривизны 300 м? Ширина пути 1,524 м. Принять $g = 10$ м/с^2. Ответ представьте в сантиметрах и округлите до десятых.

Ответ: $h = d\dfrac{\upsilon^2}{gR} = 0{,}114$ м.

Задача 5.10. На внутренней поверхности сферы радиусом 0,1 м, вращающейся вокруг вертикальной оси, находится небольшой предмет. С какой постоянной частотой должна вращаться сфера, чтобы предмет находился в точке, направление на которую составляет угол 45°? Коэффициент трения между предметом и поверхностью сферы равен 0,2.

Ответ: $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{9{,}7}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}55\ с^{-1}$.

Задача 5.11. С какой скоростью движется конькобежец по закруглению ледяной дорожки радиусом 10 м, если, проходя этот поворот, он наклоняется к горизонту под углом 76 °?

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{gR}{tg\alpha}} = 4{,}9$ м/с.

Задача 5.12. Мотоциклист совершает крутой поворот, двигаясь по дуге окружности радиусом 20 м со скоростью 20 м/с. Под каким углом к горизонту он должен наклониться, чтобы сохранить равновесие? Задачу рассмотреть с точки зрения вращающейся системы отсчета.

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\upsilon^2/gR\right) = 63{,}9°$.

Задача 5.13. Во время взлета с Земли вес космонавта становится равным 5 mg. Сколько времени длится разгон, если ракета поднимается за это время равноускоренно на высоту 13,5 км?

Указание : решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с ракетой.

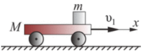
Ответ: $t = \sqrt{\dfrac{s}{2g}} = 26{,}2$ с.

Задача 5.14. При вращении горизонтального диска, лежащего на расстоянии $R = 10$ см от центра грузик слетает при частоте вращения $n = 1$ $с^{-1}$. Найдите предельный коэффициент трения μ_0, при котором начнется проскальзывание.

Указание: решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с диском.

Ответ: $\mu_0 = \dfrac{4\pi^2 n^2 R}{g} = 0{,}402.$

Задача 5.15. На край тележки, движущейся с ускорением $a = 3{,}5\ м/с^2$, поставили кубик. Определите длину тележки, если кубик соскальзывает с нее за 2 с. Коэффициент трения между кубиком и тележкой $\mu = 0{,}3$.



Указание: решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с тележкой.

Ответ: $l = \dfrac{t^2(a - \mu g)}{2} = 1{,}11$ м.

Задача 5.16. Определите ускорения свободного падения на поверхности Солнца, если радиус Солнца $r = 6{,}95 \cdot 10^8$ м, а радиус земной орбиты $R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м.

Ответ: $g_C = \dfrac{4\pi^2 R^3}{T^2 r^2} = 271\ м/с^2.$

Задача 5.17. На экваторе некоторой планеты тело весит в 1,5 раза меньше, чем на полюсе. Определите среднюю плотность вещества планеты, если период ее вращения вокруг оси составляет 20 часов.

Ответ: $\rho = \dfrac{9\pi}{GT^2} = 81\ кг/м^3.$

Суровость законов в Российской империи смягчается их неукоснительным неисполнением.

Н.Е. Салтыков-Щедрин

ГЛАВА 6. ЭНЕРГИЯ. РАБОТА. МОЩНОСТЬ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В этой главе мы начинаем знакомство с простейшими формулами энергии – потенциальной энергией тела в силовом поле и кинетической энергией движущегося тела. Показывается, что законы сохранения справедливы для изолированных систем и в целом обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени – однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени.

6.1. Кинетическая энергия. Работа и мощность

Универсальной количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи является *энергия*. Кинетическая энергия $E_к$ – физическая скалярная величина, являющаяся мерой механического движения тел.

Уравнение движения тела массой m под действием внешней силы $\vec{F}$ имеет вид (рис. 6.1)

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F},$$

или, в проекции на направление движения,

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F_\tau. \qquad (6.1.1)$$

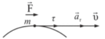


Рис. 6.1. Движение тела массой m под действием силы $\vec{F}$

Умножив обе части равенства (6.1.1) на $\upsilon\,dt = dr$, получим

$$m\upsilon\,d\upsilon = F_\tau\,dr.$$

Левая часть равенства есть ***полный дифференциал некоторой функции***:

$$m\upsilon\,d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right), \text{ тогда } d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)=F_\tau dr.$$

Если система замкнута, то $\vec{F}^{\text{âí åø}}=0$ и $F_\tau=0$, тогда и $d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)=0.$

Если полный дифференциал некоторой функции, описывающей поведение системы, равен нулю, то эта функция может служить характеристикой состояния данной системы.

Функция состояния системы, определяемая только скоростью ее движения, называется ***кинетической энергией****:*

$$E_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{6.1.2}$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы.

Кинетическая энергия – величина аддитивная: $E_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}$, где $E_{\text{к}}$ – относительная величина, её значение зависит от выбора системы координат (так же как и скорость $\vec{\upsilon}$ – относительная величина).

Энергия измеряется в СИ в единицах произведения силы на расстояние, т. е. в ньютонах на метр. $1\,\text{Н} \cdot \text{м} = 1\,\text{Дж}$.

Кроме того, в качестве единицы измерения энергии используется внесистемная единица – электрон-вольт (**эВ**). $1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

При решении задач полезна формула, связывающая кинетическую энергию с импульсом p. Получим её:

$$\frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{m}{m}\right) = \frac{m^2\upsilon^2}{2m}, \text{ отсюда}$$

$$E_{\text{к}} = \frac{p^2}{2m}. \tag{6.1.3}$$

Связь кинетической энергии с работой

Если постоянная сила действует на тело, то оно будет двигаться в направлении силы. Тогда элементарная работа по перемещению тела из точки 1 в точку 2 будет равна произведению силы F на перемещение $\mathrm{d}r$:

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}r, \text{ отсюда } A = \int_1^2 F\mathrm{d}r.$$

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}, \quad \mathrm{d}r = \upsilon\mathrm{d}t,$$

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = m\int_1^2 \upsilon\mathrm{d}\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}.$$

Окончательно получаем:

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = E_{\text{к}2} - E_{\text{к}1}.$$

Следовательно, ***работа*** *силы, приложенной к телу на пути r, численно равна изменению кинетической энергии этого тела*:

$$A = \Delta E_{\text{К}}. \tag{6.1.4}$$

Или изменение кинетической энергии $dE_{\text{к}}$ равно работе внешних сил:

$$dK = dA.$$

Работа, так же как и кинетическая энергия, измеряется в джоулях.

Скорость совершения работы (передачи энергии) называется *мощностью*, т. е. ***мощность*** *есть работа, совершаемая в единицу времени.*

Мгновенная мощность $N = \frac{dA}{dt}$, или $N = F\frac{dr}{dt} = F\upsilon$.

Средняя мощность $\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}$.

Измеряется мощность в ваттах; 1 Вт = 1 Дж/с.

6.2. Консервативные силы и системы

Кроме контактных взаимодействий, наблюдаются взаимодействия между телами, удаленными друг от друга. Подобное взаимодействие осуществляется посредством физических полей (особая форма материи). *Каждое тело* создает вокруг себя поле, которое проявляет себя именно воздействием на другие тела.

Силы, работа которых не зависит от пути, по которому двигалось тело, а зависит от начального и конечного положения тела, называются ***консервативными***.

Пусть A – работа консервативных сил по перемещению тела из точки *1* в точку *2* (рис. 6.2).

$$A_{1a2} = A_{1b2} = A_{1l2} = A_{12}.$$

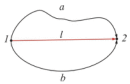


Рис. 6.2. Работа консервативных сил по перемещению тела из точки 1 в точку 2 не зависит от формы пути, а зависит от положения начальной и конечной точки

Изменение направления движения на противоположное вызывает изменение знака работы консервативных сил. Отсюда следует, что *работа консервативных сил вдоль замкнутой кривой равна нулю*:

$$\oint_L F dr = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0. \tag{6.2.1}$$

Интеграл по замкнутому контуру L $\oint\limits_L \vec{F}d\vec{r}$ называется *циркуляцией вектора* $\vec{F}$. Следовательно, ***если циркуляция*** *какого-либо вектора силы* ***равна нулю****, то эта* ***сила консервативна****.*

Центральные силы являются консервативными независимо от их природы. *Сила называется центральной*, если она направлена к одной и той же точке (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой центром сил.

Консервативные силы: гравитационные силы тяжести, электростатические силы, силы центрального стационарного поля и т. д.

Неконсервативные силы: силы трения, силы вихревого электрического поля и т. д.

Консервативная система *– такая, внутренние силы которой только консервативные, внешние – консервативны и стационарны.*

Пример консервативных сил – гравитационные силы (рис. 6.3).

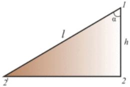


Рис. 6.3. Работа силы тяжести по перемещению тела массой m из положения 1 в положение 2.

$$A_{12} = A_{12'} = mgh$$

Работа силы тяжести $A_{12} = mgh$. С другой стороны, $A_{12'} = mgl\cos\alpha = mgh$, где α – угол между силой $m\vec{g}$ и направлением перемещения.

Таким образом, из примера видно, что работа не зависит от формы пути, значит, силы консервативны, а поле этих сил потенциально.

Здесь полезно вспомнить «золотое правило механики», согласно которому ни один из простых механизмов не дает выигрыша в работе; во сколько раз выигрываем в силе, во столько же раз проигрываем в расстоянии.

6.3. Потенциальная энергия

Итак, кинетическая энергия $E_к$ – энергия движения. Потенциальная энергия $E_п$ – энергия взаимодействия тел или частиц тела, зависящая от их взаимного расположения. Можно говорить о потенциальной энергии тела массой m в поле тяжести Земли, заряда q в электростатическом поле, о потенциальной энергии тела в поле упругой силы пружины и т. д.

Если на систему материальных тел действуют *консервативные силы*, то можно ввести понятие *потенциальной энергии*.

Работа, совершаемая консервативными силами при изменении конфигурации системы, то есть при изменении положения тел относительно системы отсчета, не зависит от того, как было осуществлено это изменение. Работа определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.

$$A_{12} = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}, \tag{6.3.1}$$

здесь потенциальная энергия $E_{\text{п}}(x, y, z)$ – *функция состояния системы, зависящая только от координат всех тел системы в поле консервативных сил.*

Итак, $E_{\text{к}}$ определяется скоростью движения тел системы, а U – их взаимным расположением.

Из (6.3.1) следует, что работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии:

$$\text{d}A = -\text{d}E_{\text{п}}.$$

Нет единого выражения для $E_{\text{п}}$. В разных случаях она определяется по-разному.

Потенциальная энергия при гравитационном взаимодействии

Работа тела при падении $A = mgh$. Или $A = E_{\text{п}} - E_{\text{п}0}$. Условились считать, что на поверхности Земли ($h = 0$) $E_{\text{п}0} = 0$, тогда $E_{\text{п}} = A$, т. е.

$$E_{\text{п}} = mgh. \tag{6.3.2}$$

Для случая гравитационного взаимодействия между массами M и m, находящимися на расстоянии r друг от друга, потенциальную энергию можно найти по формуле

$$E_{\text{п}} = -\gamma \frac{Mm}{r}. \tag{6.3.3}$$

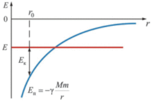


Рис. 6.4. Диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс M и m: полная энергия $E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$

На рис. 6.4 изображена диаграмма потенциальной энергии гравитационного притяжения масс M и m.

Здесь полная энергия $E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$. Отсюда кинетическая энергия

$$E_{\text{к}} = E - E_{\text{п}}.$$

Потенциальная энергия упругой деформации (пружины, стержня)

Найдём работу, совершаемую при деформации упругой пружины.

Сила упругости, $F_{упр} = -kx$, где k – коэффициент упругости. Сила непостоянна, поэтому элементарная работа $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\mathrm{d}x$ (знак минус говорит о том, что работа совершена над пружиной). Тогда

$$A = \int \mathrm{d}A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \tag{6.3.4}$$

т. е. $A = E_{п1} - E_{п2}$. Примем $E_{п2} = 0$, $E_{п1} = E_п$, тогда

$$E_п = \frac{kx^2}{2}. \tag{6.3.5}$$

На рис. 6.5 показана диаграмма потенциальной энергии пружины.

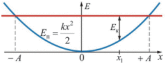


Рис.6.5. Диаграмма потенциальной энергии пружины: полная энергия $E = E_к + E_п$

Здесь $E = E_к + E_п$ – полная механическая энергия системы, $E_к$ – кинетическая энергия в точке x_1.

Связь между потенциальной энергией и силой

Пространство, в котором действуют консервативные силы, называется ***потенциальным полем.***

Каждой точке потенциального поля соответствует некоторое значение силы $\vec{F}$, действующей на тело, и некоторое значение потенциальной энергии $E_п$. Значит, между силой $\vec{F}$ и $E_п$ должна быть связь $\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$, с другой стороны, $\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_п$, следовательно $\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}E_п$, отсюда

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_п}{\mathrm{d}\vec{r}}. \tag{6.3.6}$$

Для компонент силы по осям x, y, z можно записать:

$$F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x};\quad F_y = -\frac{\partial E_п}{\partial y};\quad F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z}.$$

Так как вектор силы $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, получим

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_п}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_п}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_п}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_п = -\mathrm{grad}E_п, \tag{6.3.7}$$

где ∇ – оператор Гамильтона[20] (оператор набла),

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Градиент – это вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции. Знак «–» показывает, что вектор $\vec{F}$ направлен в сторону наибыстрейшего уменьшения $E_п$.

Следовательно, *консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому со знаком минус:* $\vec{F} = -\text{grad}E_п$.

6.4. Закон сохранения механической энергии

В 40-х годах XIX в. трудами ученых Р. Майера, Г. Гельмгольца и Дж. Джоуля (в разное время и независимо друг от друга) был доказан закон сохранения и превращения энергии.

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц.

Силы взаимодействия между частицами ($\vec{F}^{\text{вз}}$) – консервативные. Кроме внутренних сил, на частицы действуют внешние консервативные и неконсервативные силы, т. е. рассматриваемая система частиц или тел консервативна. Тогда для этой системы можно найти полную энергию системы

$$E = K + U_{\text{внутр}} + U_{\text{внеш}} = \text{const}, \tag{6.4.1}$$

Для механической энергии ***закон сохранения*** звучит так: ***полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остаётся постоянной***.

Для *замкнутой системы*, т. е. для системы, на которую не действуют внешние силы, можно записать:

$$E = K + U_{\text{внутр}} = \text{const}, \tag{6.4.2}$$

т. е. ***полная механическая энергия*** *замкнутой системы материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы,* ***остаётся постоянной***.

Если в замкнутой системе действуют неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы не сохраняется – частично она переходит в другие виды энергии, неконсервативные.

Система, в которой механическая энергия переходит в другие виды энергии, называется ***диссипативной***, сам процесс перехода называется ***диссипацией энергии***.

В диссипативной, изолированной от внешнего воздействия системе остаётся постоянной сумма всех видов энергии (механической, тепловой и т. д.) Здесь действует общий закон сохранения энергии.

Этот процесс хорошо демонстрирует маятник Максвелла (рис. 6.6).

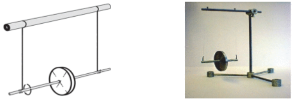


Рис. 6.6. Маятник Максвелла

Роль консервативной внешней силы здесь играет гравитационное поле. Маятник прекращает свое движение из-за наличия внутренних неконсервативных сил (сил трения, сопротивления воздуха).

6.5. Условие равновесия механической системы

Мерой устойчивости тела в положении равновесия является наименьшее значение работы, совершаемой внешней силой, для того, чтобы переместить тело в такое положение, откуда после действия силы оно уже не сможет вернуться в исходное состояние. *Из двух тел* ***более устойчивым*** *является тело, для выведения которого из положения равновесия требуется совершение большей работы.*

Механическая система будет находиться в ***равновесии***, *если на неё не будет действовать сила*. Это условие *необходимое*, но *не достаточное,* так как система может при этом находиться в равномерном и прямолинейном движении.

В замкнутой системе полная энергия E = const. Поэтому кинетическая энергия $E_к$ может возрастать только за счет убывания потенциальной энергии $E_п$ (кинетическая энергия не может быть отрицательной).

Если система находится в таком состоянии, что скорости всех тел равны нулю, а $E_п = E_{п\ min}$, то без воздействия извне, тела системы не могут прийти в движение, т. е. система будет находиться в равновесии.

Таким образом, для замкнутой системы равновесной может быть только такая конфигурация тел, которая соответствует $E_{п\ min}$.

Рассмотрим пример, изображенный на рис. 6.7 и рис. 6.8 (Земля – шарик, скользящий без трения по изогнутой проволоке). В этом случае взаимное расположение тел системы может быть определено с помощью одной величины – координаты x.

Итак, по определению, $F_x = 0$ – условие равновесия системы. Из (6.3.7) имеем $\left|\vec{F}_x\right| = -\frac{\partial E_п}{\partial x}$. Следовательно, при $\frac{\partial E_п}{\partial x} = 0$ система будет находиться в состоянии равновесия.

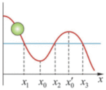


Рис. 6.7. Система Земля – шарик, скользящий без трения по проволоке

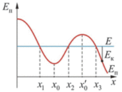


Рис. 6.8. Полная кинетическая и потенциальная энергии системы

Именно так находят положение точек экстремума.

$$\frac{\partial E_п}{\partial x} = 0 \text{ при } x = x_0 \text{ и } x = x_0':$$

- при x_0' $E_п = \max$ – состояние неустойчивого равновесия;
- при x_0 $E_п = \min$ – система находится в устойчивом равновесии.

Следовательно, *достаточным условием равновесия является равенство минимуму значения* $E_п$ (это справедливо не только для механической системы, но, например, и для атома).

Область между x_1 и x_2, в которой частица оказывается запертой, *называется потенциальной ямой*, а область между x_2 и x_3, через которую частица не может пройти, называется потенциальным барьером. В классической механике потенциальный барьер является абсолютным для движения частицы. В квантовой механике при определенных условиях частица может пройти через потенциальный барьер. Это явление называется туннельным эффектом и играет важную роль в микромире. Более подробно этот эффект рассматривается в квантовой механике.

6.6. Применение законов сохранения*

6.6.1. Абсолютно упругий центральный удар

При *абсолютно неупругом ударе* закон сохранения механической энергии не работает.

Применим закон сохранения механической энергии для расчета скорости тел при ***абсолютно упругом ударе*** – *ударе, при котором не происходит превращения механической энергии в другие виды энергии.*

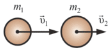


Рис. 6.9. Абсолютно упругий центральный удар шаров массами m_1 и m_2

На рис. 6.9 изображены два шара m_1 и m_2. Скорости шаров $\vec{\upsilon}_1 > \vec{\upsilon}_2$, поэтому, хотя скорости и направлены в одну сторону, все равно будет удар. Систему можно считать замкнутой. Кроме того, при абсолютно упругом ударе она консервативна.

Обозначим $\vec{\upsilon}'_1$ и $\vec{\upsilon}'_2$ как скорость шаров после их столкновения.

В данном случае можно воспользоваться законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса (в проекциях на ось x):

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2'^2}{2}; \\ m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon'_1 + m_2\upsilon_2'. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений относительно υ'_1 и υ'_2, получим

$$\upsilon'_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2}, \qquad \upsilon'_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Таким образом, скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковыми по величине и по направлению.

Рассмотрим теперь *абсолютно упругий удар шара о неподвижную массивную стенку*.

Стенку можно рассматривать как неподвижный шар с $\upsilon_2 = 0$, массой $m_2 \to \infty$. Разделим числитель и знаменатель на m_2 и пренебрежем m_1/m_2, тогда

$$\upsilon'_1 = \frac{2\upsilon_2 + (m_1/m_2 - 1)\upsilon_1}{m_1/m_2 + 1} = \frac{2\upsilon_2 - \upsilon_1}{1}, \text{ т. е. } \upsilon'_1 = -\upsilon_1.$$

Таким образом, шар m_1 изменит направление скорости на *противоположное*.

6.6.2. Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар *– это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются дальше как единое целое.*

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу.

Если массы шаров – m_1 и m_2, их скорости до удара – υ_1 и υ_2, то, используя закон сохранения импульса, можно записать:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon, \qquad (6.6.1)$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость движения шаров после удара. Тогда

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \qquad (6.6.2)$$

Если шары двигались навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы и скорости шаров равны,

$$\upsilon = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} = 0.$$

Выясним, как меняется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии (диссипация энергии). Эту «потерю» можно определить по разности кинетических энергий до и после удара:

$$\Delta E_к = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta E_к = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2. \quad (6.6.3)$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($\upsilon_2 = 0$), то

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}, \quad \Delta E_к = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}.$$

Когда $m_2 >> m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $\upsilon << \upsilon_1$ и почти вся кинетическая энергия при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Когда $m_2 \approx m_1$, тогда $\upsilon \approx \upsilon_1$, и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение, а не на остаточную деформацию (например, молоток – гвоздь).

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

6.6.3. Движение тел с переменной массой

Рассмотрим теперь системы, массы которых изменяются. Такие системы можно рассматривать как своего рода неупругое столкновение. В этом случае импульс системы

$$\vec{p} = M\vec{\upsilon}_{ц.и}. \quad (6.6.4)$$

Полный импульс системы частиц равен произведению полной массы системы M на скорость её центра масс $\vec{\upsilon}_{\text{ц.м}}$.

Если продифференцировать обе части равенства по времени, то при условии, что M постоянно, получим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{\upsilon}_{\text{ц.м}}}{dt} = M\vec{a}_{\text{ц.м}} = \vec{F}^{\text{внеш}}, \qquad (6.6.5)$$

где $\vec{F}^{\text{внеш}}$ – внешняя результирующая сила, приложенная к системе. Необходимо очень тщательно определять систему и учитывать все изменения ее импульса.

Важным примером систем с переменной массой может служить погрузка сыпучих или иных материалов на транспортерную ленту конвейера; при этом масса M нагруженного конвейера возрастает, т. е. $dM / dt > 0$.

Другим примером систем с переменной массой являются ракеты, которые движутся вперед за счет выбрасывания назад сгоревших газов; при этом ракета ускоряется силой, действующей на нее со стороны газов. Масса M ракеты все время уменьшается, т. е. $dM / dt < 0$.

Рассмотрим движение тел с переменной массой на примере ракеты.

Реактивное движение основано на *принципе отдачи*. В ракете при сгорании топлива *газы, нагретые до высокой температуры, выбрасываются из сопла с большой скоростью* υ_r (рис. 3.4). Ракета и выбрасываемые газы взаимодействуют между собой по закону сохранения импульса:

$$m_p\upsilon_p = m_r\upsilon_r.$$

Уравнение движения ракеты (уравнение Мещерского[21]):

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_r}{dt} = \vec{F}_p, \text{ откуда } \vec{F}_p = \vec{\upsilon}_r\frac{dm}{dt},$$

где вектор $\vec{F}_p$ – реактивная сила. Из этого уравнения можно получить

$$d\upsilon_p = -\upsilon_r\frac{dm}{m}.$$

При υ_r = const из этого уравнения путем интегрирования можно найти максимальную скорость ракеты (*характеристическую скорость*):

$$\upsilon_p = -\upsilon_r \ln(M_0/M), \qquad (6.6.6)$$

где M_0 и M – стартовая и конечная массы ракеты. Это соотношение в физике называют *формулой Циолковского*[22]. Из него следует, что для достижения скорости υ, в 4 раза превышающей по модулю относительную скорость выбрасываемых газов, стартовая масса одноступенчатой ракеты должна примерно в 50 раз превышать ее конечную массу.

Свойства пространства–времени и законы сохранения

Знакомство с конкретными примерами позволяет сформулировать важные общие положения.

➢ Законы сохранения носят фундаментальный характер и тесно связаны с симметрией пространства и времени:

- закон сохранения энергии связан с однородностью времени, т. е. равнозначностью всех моментов времени;
- закон сохранения импульса связан с однородностью пространства, т. е. равнозначностью всех точек пространства.

➢ Законы сохранения носят общий характер и не зависят от конкретной системы и ее движения. Из законов сохранения вытекает, что какие-то процессы заведомо оказываются невозможными. Так, в 1775 г. Французская Академия решила не принимать к рассмотрению проекты вечных двигателей – как противоречащие закону сохранения энергии.

➢ Законы сохранения позволяют рассмотреть общие свойства движения без решения уравнений и детальной информации о протекании процессов во времени. Поэтому законы сохранения могут быть использованы даже в тех случаях, когда силы точно не известны. Так, в частности, обстоит дело в физике элементарных частиц. Даже в тех случаях, когда силы заданы точно, законы сохранения могут оказать существенную помощь при решении задач о движении частиц.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. В чем различие между понятиями энергии и работы?
2. Как найти работу переменной силы?
3. Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?
4. Что такое мощность? Выведите ее формулу.
5. Дайте определения и выведите формулы для известных видов механической энергии.
6. Какова связь между силой и потенциальной энергией?
7. Чем обусловлено изменение потенциальной энергии?
8. Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?
9. В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?
10. В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?
11. Что такое потенциальная яма? потенциальный барьер?

12. Какие заключения о характере движения тел можно сделать из анализа потенциальных кривых?

13. Как охарактеризовать положения устойчивого и неустойчивого равновесия?

14. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?

15. Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?

16. Может ли быть отрицательной кинетическая энергия? потенциальная энергия?

17. Можно ли на основе закона сохранения ответить на вопрос о том, как будет происходить то или иное движение?

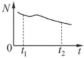
18. Можно ли на основе законов сохранения высказать суждение о принципиальной возможности или невозможности того или иного движения точки?

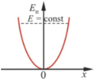
19. В каком случае закон сохранения импульса можно применить к неизолированной системе?

20. На систему биллиардных шаров, движущихся по горизонтальному столу, действует сила трения, и поэтому эта система в отношении горизонтальных движений не является изолированной. Можно ли применять закон сохранения импульса к столкновению шаров? Почему?

21. На рис. закрашенные площади определяют совершенную работу. Что можно сказать о силах, действующих на тела?

22. На рис. приведен график зависимости мощности двигателя от времени. Как по графику можно определить совершенную двигателем работу за время $t = t_2 - t_1$?





23. На рис. представлен график зависимости потенциальной энергии упруго деформированной пружины от деформации. Полная механическая энергия пружины не меняется при изменении положения пружи-

ны (на графике – горизонтальная прямая E = const). Используя данный график, начертите зависимость кинетической энергии упругодеформированной пружины от деформации.

Примеры решения задач

Задача 6.1. Мощность моторов самолета массой 4 т при отрыве от земли N = 600 кВт. Разгоняясь равноускоренно, самолет достигает скорости υ = 30 м/с. Принимая, что коэффициент сопротивления μ = 0,04 не зависит от скорости, определите длину пробега самолета перед взлетом.

Дано:	**СИ**
m = 4 т	$4\cdot10^3$ кг
N = 600 кВт	$6\cdot10^5$ Вт
υ = 30 м/с	
μ = 0,04	
l – ?	

Решение. Выбрав направление оси x в горизонтальном направлении в сторону движения самолета (см. рис.), запишем II закон Ньютона в проекции на эту ось при движении самолета по взлетной полосе:

$$ma = F_T - \mu N,$$

где F_T – сила тяги моторов. Так как $N = mg$, то

$$ma = F_T - \mu mg,$$

отсюда сила тяги моторов

$$F_T = ma + \mu mg.$$

Мощность двигателя $N = F_T\upsilon$, следовательно

$$F_T = N/\upsilon.$$

Исходя из этого получаем:

$$N/\upsilon = ma + \mu mg.$$

Так как движение равноускоренное, а начальная скорость не дана, это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{N}{\upsilon} = \frac{m\upsilon^2}{2l} = \mu mg,$$

отсюда длина пробега самолета перед взлетом

$$l = \frac{m\upsilon^2}{2\left(N/\upsilon - \mu mg\right)},\ [l] = \left[\frac{\text{кг}\cdot\left(\text{м}^2/\text{с}^2\right)}{\dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2\text{м}}{\text{с}\cdot\text{м}/\text{с}} - \text{кг}\cdot\left(\text{м}/\text{с}^2\right)}\right] = \text{м},$$

$$l = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^2}{2\left(\frac{6 \cdot 10^5}{30} - 0{,}04 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81\right)} = 97{,}7 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 97{,}7$ м.

Задача 6.2. На край тележки массой M = 5 кг, равномерно движущейся по рельсам, опускают с небольшой высоты короткий брусок массой m = 1 кг. Коэффициент трения бруска о тележку μ = 0,5, между тележкой и рельсами трение отсутствует. На какое расстояние s переместится брусок по тележке, если её длина l = 0,5 м, а скорость тележки постоянна и равна υ_1 = 2 м/с? При какой минимальной скорости тележки брусок соскользнет с неё? Какое количество тепловой энергии выделится при этом?

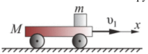
Дано:
M = 5 кг
m = 1 кг
μ = 0,5
l = 0,5 м
υ_1 = 2 м/с

s – ?
$\upsilon_{1\min}$ – ?
Q – ?

Решение. При взаимодействии бруска и тележки выполняется закон сохранения импульса. Поскольку в горизонтальном направлении внешние силы не действуют, то в проекции на ось x (рис.) закон сохранения импульса можно записать в виде:

$$M\upsilon_1 = (M+m)\upsilon,$$

где υ – скорость тележки после остановки бруска. Отсюда:



$$\upsilon = \upsilon_1 = \frac{M}{M+m}.$$

В системе брусок – тележка действует сила трения, поэтому закон сохранения энергии можно представить в виде

$$E_{2к} - E_{1к} = A_{12}^{тр} < 0,$$

где $E_{1к}$, $E_{2к}$ – кинетическая энергия системы в момент времени сразу после опускания бруска и в момент остановки бруска, соответственно.

Используя это выражение и работу силы трения скольжения, получим:

$$-\mu mgs = \frac{(M-m)\upsilon^2}{2} - \frac{M\upsilon_1^2}{2}.$$

Исходя из этого получим искомое расстояние:

$$s = \frac{M\upsilon_1^2}{2\upsilon g(M+m)},\ [s] = \left[\frac{кг \cdot м^2/с^2}{м^2/с^2 \cdot кг}\right] = м,$$

$$s = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 6} = 0{,}339 \text{ м}.$$

По условиям задачи брусок должен соскользнуть с тележки, это случится, если $s \geq l$, т. е.

$$\frac{M\upsilon_1^2}{2\upsilon g(M+m)} \geq l.$$

Искомая минимальная скорость, при которой брусок соскользнет с неё:

$$\upsilon_{1\min} = \sqrt{\frac{2\mu g l(M+m)}{m}},\ [\upsilon_{1\min}] = \sqrt{\frac{(\text{м/с}^2)\cdot \text{м}\cdot\text{кг}}{\text{кг}}} = \text{м/с},$$

$$\upsilon_{1\min} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 6}{1}} = 5{,}42 \text{ м/с}.$$

Количество теплоты, выделившееся за время движения бруска относительно тележки:

$$Q = |A_{\text{тр}}| = \frac{M\upsilon_1^2}{2} - \frac{(M+m)\upsilon^2}{2};$$

используя это выражение и выражение для скорости тележки, получим:

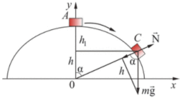
$$Q = \frac{M\upsilon_1^2}{2}\left(1 - \frac{M}{M+m}\right),$$

$$Q = \frac{5 \cdot 4}{2}\left(1 - \frac{5}{6}\right) = 1{,}67 \text{ Дж}.$$

Ответ: $s = 0{,}339$ м; $\upsilon_{1\min} = 5{,}42$ м/с; $Q = 1{,}67$ Дж.

Задача 6.3. С вершины идеально гладкой полусферы радиусом R = 60 см без трения соскальзывает небольшое тело. Определите, на каком расстоянии от вершины тело оторвется от полусферы.

Дано:
R = 60 см
h_1 – ?



Решение. Тело вплоть до момента отрыва движется по полусфере под действием силы тяжести mg и силы нормальной реакции N полусферы. Запишем второй закон Ньютона для тела в проекциях на ось Y, направленную вдоль радиуса к центру окружности. Согласно рис.

$$mg\cos\alpha - N = \frac{m\upsilon^2}{R},$$

где $\cos\alpha = h/R$, h – высота, на которой тело оторвется от полусферы.

В момент отрыва сила реакции опоры $N = 0$. Тогда

$$mg\cos\alpha = \frac{m\upsilon^2}{R}, \text{ отсюда}$$

$$\upsilon^2 = gR\cos\alpha. \qquad (1)$$

Согласно закону сохранения механической энергии

$$mgR = mgh + \frac{m\upsilon^2}{R}. \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2), найдем:

$$mgR = mgh + \frac{mgR\cos\alpha}{2} \text{ или } R = h + \frac{R\cos\alpha}{2}.$$

Искомое расстояние

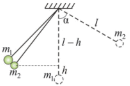
$$h_1 = R - h = \frac{R\cos\alpha}{2} = \frac{Rh}{2R} = \frac{h}{2} = \frac{R - h_1}{2},$$

тогда

$$h_1 = R/3 = 0{,}2 \text{ м}.$$

Ответ: h_1 = 20 см.

Задача 6.4. Два свинцовых шара массами m_1 = 2 кг и m_2 = 3 кг подвешены на нитях длиной l = 70 см так, что касаются друг друга. Меньший шар отклонили на угол α = 60° и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определите высоту h, на которую поднимутся шары после удара. Найдите энергию $\Delta E_к$, израсходованную на деформацию шаров при ударе.



Дано:
m_1 = 2 кг
m_2 = 3 кг
l = 70 см
α = 60°

h – ?
$\Delta E_к$ – ?

Решение: Удар неупругий, поэтому после удара шары движутся вместе со скоростью υ, которую найдем из закона сохранения импульса:

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon, \qquad (1)$$

где υ_1 и υ_2 – скорости шаров до удара. Скорость υ_1 малого шара найдем из закона сохранения механической энергии:

$$m_1gh_1 = m_1\upsilon_1^2/2,$$

тогда $\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin(\alpha/2)$, (2)

где $h_1 = l(1-\cos\alpha)$.

Из выражений (1) и (2), при условии, что $\upsilon_2 = 0$, получим

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} = \frac{2m_1\sqrt{gl}\sin(\alpha/2)}{m_1+m_2}. \quad (3)$$

Из закона сохранения механической энергии имеем:

$$(m_1+m_2)\frac{\upsilon^2}{2} = (m_1+m_2)gl,$$

отсюда, с учетом (3), искомая высота

$$h = \frac{\upsilon^2}{g} = \frac{2m_1^2 l\sin^2(\alpha/2)}{(m_1+m_2)^2}; h = 5{,}6\cdot 10^2\ м = 5{,}6\ см.$$

Энергия, израсходованная на деформацию шаров при ударе,

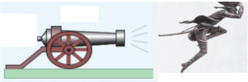
$$\Delta E_k = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)}{2}\upsilon^2. \quad (4)$$

Подставив (2) в (4), получаем:

$$\Delta E_k = 2gl\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\sin^2\frac{\alpha}{2};\ \ \Delta E_k = 4{,}12\ Дж.$$

Ответ: $h = 5{,}6$ см; $\Delta E_к = 4,\ 12$ Дж.

Задача 6.5. ***Полет на ядре.*** Артиллеристы стреляют так, чтобы ядро попало в неприятельский лагерь, находящийся в $l_0 = 7{,}2$ км от пушки. В момент вылета ядра из дула на него вскакивает барон Мюнхаузен (абсолютно неупругий удар), масса которого в $n = 5$ раз больше массы ядра. Из-за этого ядро падает, не долетев до цели. Какое расстояние барону придется пройти пешком, чтобы добраться до неприятельского лагеря? Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение. Если ядро вылетело из дула со скоростью $\vec{\upsilon}_0$, то после вскакивания на него барона его скорость стала равной $\vec{\upsilon} = \frac{m\upsilon_0}{M+m}$, где

m – масса ядра, а M – масса Мюнхаузена. Артиллеристы рассчитывали угол возвышения α орудия по формуле $l_0 = \frac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\alpha$. Поскольку скорость изменилась, а угол остался прежним, дальность полета составит

$$l_0 = \frac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\alpha = \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^2 l_0 = l_0\left(\frac{m}{M+m}\right)^2.$$

Поэтому барону надо будет пройти расстояние

$$s = l_0 - l = l_0\frac{M(M+2m)}{(M+m)^2} = l_0\frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

$$s = 7{,}2\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2} = 7 \text{ км}.$$

Иными словами, барону удалось пролететь на ядре только 200 м.

Задача* 6.6. Ракета движется, выбрасывая струю газа с постоянной скоростью υ_r = 900 м/с. Расход газа q = 0,25 кг/с, начальная масса ракеты m_0 = 1,5 кг. Какую скорость относительно Земли приобретет ракета через t = 2 с после начала движения?

Дано:
υ_r = 900 м/с
q = 0,25 кг/с
m_0 = 1,5 кг
t = 2 с

υ – ?

Решение: На основании закона сохранения импульса для системы «ракета – струя газа» запишем:

$$d\vec{p} = d\vec{p}_p + d\vec{p}_r = 0, \qquad (1)$$

где $d\vec{p}_p$ и $d\vec{p}_r$ – изменение импульса ракеты и газа, соответственно, за промежуток времени dt.

В проекции на ось oy уравнение (1) примет вид:

$$dp_p - dp_r = 0. \qquad (2)$$

Если в момент времени t ракета имела массу $m = m_0 - qt$, то за время dt скорость ракеты за счет реактивного действия газовой струи изменится на $d\upsilon$, а импульс ракеты – на величину

$$dp_p = (m_0 - qt)d\upsilon. \qquad (3)$$

Порция газа qdt, двигаясь вместе с ракетой, обладает скоростью $\vec{\upsilon}$. Покинув ракету, эта же масса газа за время dt приобретает относительно Земли скорость $\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_r$. Таким образом, импульс порции газа, выброшенной из ракеты, изменится на величину

$$dp_r = q(\upsilon + \upsilon_r)dt - q\upsilon dt = q\upsilon_0 dt. \qquad (4)$$

Подставив выражения (3) и (4) в (2), получим:

$$\left(m_0 - qt\right)d\upsilon - q\upsilon_{\text{г}}dt = 0 \text{ или } d\upsilon = \frac{q\upsilon_{\text{г}}dt}{m_0 - qt}.$$

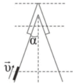
Интегрировав эти уравнения при начальной скорости ракеты, равной нулю, получим:

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^{t} \frac{q\upsilon_{\text{г}}}{m_0 - qt}\mathrm{d}t,\ \upsilon = \upsilon_{\text{г}} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right).$$

Размерность: $[\upsilon]$ = м/с.

Проведем расчеты: $\upsilon = 900 \ln\left(\frac{1{,}5}{1{,}5 - 0{,}25 \cdot 2}\right) = 365 \text{ м/с}$.

Ответ: υ = 365 м/с.



Задача 6.7. Гибкая однородная цепь длиной L может двигаться по желобу, имеющему в сечении форму равнобедренного треугольника с углом 2α при вершине и расположенному в вертикальной плоскости. Трение отсутствует, предполагается, что цепь прилегает к желобу. Найти наименьшую начальную скорость цепи, необходимую для преодоления такой горки. В начальный момент времени расстояние между горизонтальными прямыми, проходящими через центр тяжести цепи и вершины желоба, равно H.

Решение. Цепь перевалит через горку, если в тот момент времени, когда середина цепи достигнет вершины желоба, скорость цепи обратится в нуль. Выберем в качестве нулевого уровня потенциальной энергии горизонтальную прямую, проходящую через вершину желоба. Тогда в начальном состоянии полная энергия цепи равна

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} + \left(-mgH\right).$$

В конечном состоянии центр тяжести цепи находится на расстоянии $\left(L/4\right)\cos\alpha$ от вершины треугольника; полная энергия

$$0 + \left(-mg\frac{L}{4}\cos\alpha\right).$$

$$\upsilon_0 = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{L}{4H}\cos\alpha\right)}.$$

Заметим, что для точечного тела наименьшая скорость равна $\sqrt{2gH}$. В нашем примере $\upsilon < \sqrt{2gH}$.

Этот пример поясняет, почему прыгун в высоту, использующий технику «форсбери–флоп», может достичь большей высоты, чем при прыжке перекатом. Совершая прыжок, Дик Форсбери перенес через планку сначала корпус, голову и ноги, при этом центр тяжести оставался ниже уровня планки.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.1. Два груза массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 15$ кг подвешены на нитях длиной $l = 2$ м так, что грузы соприкасаются между собой. Маленький груз был отклонен на угол $\varphi = 60°$ и пущен. Определить высоту h, на которую поднимутся оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим.

Ответ: $h = l(1 - \cos\varphi)(m_1/(m_1 + m_2)^2) = 0{,}16$ м.

Задача 6.2. На рельсах стоит платформа, на которой в горизонтальном положении закреплено орудие без противооткатного устройства. Из орудия производят выстрел вдоль железнодорожного пути. Масса снаряда m_1 равна 10 кг и его скорость $\upsilon = 1$ км/с. Масса m_2 платформы с орудием и прочим грузом равна 20 т. На какое расстояние l откатится платформа после выстрела, если коэффициент сопротивления $\mu = 0{,}002$?

Ответ: $l = m_1^2 \upsilon_1^2 / \left(2\mu g m_2^2\right) = 6{,}37$ м.

Задача 6.3. Камешек скользит с наивысшей точки купола, имеющего форму полусферы. Какую дугу α опишет камешек, прежде чем оторвется от поверхности купола? Трением пренебречь.

Ответ: $\alpha = \arccos(2/3) = 0{,}268\pi$.

Задача 6.4. Молот массой $m_1 = 5$ кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса m_2 наковальни равна 100 кг. Массой куска железа пренебречь. Удар неупругий. Определить КПД η удара молота при данных условиях.

Ответ: $\eta = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}952$.

Задача 6.5. Боек свайного молота массой $m_1 = 500$ кг падает с некоторой высоты на сваю массой $m_2 = 100$ кг. Найти КПД η удара бойка, считая удар неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи при её углублении пренебречь.

Ответ: $\eta = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}833$.

Задача 6.6. Молотком, масса которого $m_1 = 1$ кг, забивают в стену гвоздь $m_2 = 75$ г. Определить КПД η удара молотка при данных условиях.

Ответ: $\eta = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}93$.

Задача* 6.7. Шар массой m = 1,8 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы M. В результате прямого упругого удара шар потерял ω = 0,36 своей кинетической энергии $E_{к1}$. Определить массу большего шара.

Ответ: $M = \dfrac{m\left(1+\sqrt{1-\omega}\right)^2}{\omega} = 16{,}2$ кг.

Задача* 6.8. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров больший шар покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял ω = 3/4 своей кинетической энергии. Определить отношение $k = M/m$ масс шаров.

Ответ: $k = \dfrac{\left(1+\sqrt{1-\omega}\right)^2}{\omega} = 3$.

Задача 6.9. Частица массой $m_1 = 10^{-25}$ кг обладает импульсом $p_1 = 5\cdot10^{-20}$ кг·м/с. Определить, какой максимальный импульс p_2 может передать эта частица, сталкиваясь упруго с частицей массой $m_2 = 4\cdot10^{-25}$ кг, которая до соударения покоилась.

Ответ: $p_2 = \dfrac{2m_2p_1}{m_1-m_2} = 8\cdot10^{-20}$ кг·м/с.

Задача* 6.10. С поверхности Луны стартовала ракета массой m_c = 2 т. Спустя время τ = 1 мин ракета достигла первой (лунной) космической скорости υ_1 = 1,68 км/с. Определить массовый расход μ топлива, если скорость u истечения газов из сопла ракеты равна 4 км/с. Силой тяжести пренебречь.

Ответ: $\mu = \dfrac{m_c}{\tau}\left(1-\exp\dfrac{-\upsilon_1}{u}\right) = 11{,}4$ кг/с.

Задача* 6.11. Топливо баллистической ракеты составляет η = 3/4 от стартовой массы ракеты. Определить скорость υ ракеты после полного сгорания топлива, если скорость u истечения газов из сопла ракеты постоянна и равна 2 км/с. Силой тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\upsilon = u\ln\dfrac{1}{1-\eta} = 2{,}77$ км/с.

Задача* 6.12. Во сколько раз будет отличаться ускорение a ракеты от стартового ускорения a_c в тот момент времени, когда её скорость υ станет равной скорости u истечения газов из сопла ракеты. Силу тяги считать неизменной. Силами тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\dfrac{a}{a_c} = \exp\dfrac{\upsilon}{u} = 2{,}72$.

Задача* 6.13. Каково относительное изменение $|\Delta m|/m_c$ (m_c – стартовая масса) массы ракеты к тому моменту времени, когда её скорость υ достигнет скорости u истечения газов из сопла ракеты? Силами тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\dfrac{|\Delta m|}{m_c} = \dfrac{\exp\dfrac{\upsilon}{u} - 1}{\exp\dfrac{\upsilon}{u}} = 0{,}632.$

Задача 6.14. С какой наименьшей скоростью следует бросить с уровня Земли камень, чтобы он смог перелететь через вертикальную стену высотой 20 м и шириной 10 м? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2gh} = 22{,}4$ м/с.

Задача 6.15. Орудие, имеющее массу ствола 500 кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда 5 кг, его начальная скорость 460 м/с. После выстрела ствол откатывается на 40 см. Определите среднее значение силы торможения, возникающей в противооткатном устройстве.

Ответ: $F = \dfrac{(m_2\upsilon_0)^2}{2m_1 s} = \dfrac{(5\cdot 460)^2}{2\cdot 500\cdot 0{,}4} = 13225$ Н.

Задача 6.16. Два тела, массы которых одинаковы, движутся навстречу друг другу, при этом скорость одного тела в 2 раза больше скорости второго. Какая часть механической энергии системы перейдет во внутреннюю энергию при центральном абсолютно неупругом ударе?

Ответ: $\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{2{,}25m\upsilon_2^2}{2{,}5m\upsilon_2^2} = 0{,}9.$

Задача 6.17. Пуля ударяет со скоростью 400 м/с в центр шара, подвешенного на нити длиной 4 м, и застревает в нем. Определите косинус угла, на который отклоняется нить, если масса пули 20 г, масса шара 5 кг.

Ответ: $\cos\alpha = 1 - \left(\dfrac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \dfrac{1}{2gl} = 0{,}97.$

Задача 6.18. Ракета массой $M = 200$ г вместе с зарядом взлетает вертикально вверх. Определите высоту подъема, если масса заряда m = 50 г, а скорость истечения газов $\upsilon_1 = 120$ м/с.

Ответ: $h = \dfrac{\upsilon_1^2 m}{2(M + m)g} = 81{,}5$ м.

Задача 6.19. Сравните работу, совершенную двигателем автомобиля при равномерном движении со скоростями $\upsilon_1 = 20$ км/ч и $\upsilon_2 = 20$ км/ч за один и тот же промежуток времени. Силу сопротивления считать не зависящей от скорости.

Ответ: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 2$.

Задача 6.20. Шар массой $m = 500$ кг, падая с высоты $h = 1$ м, ударяется о металлическую плиту. Определите среднее значение силы удара $<F>$, если его длительность $t = 0{,}01$ с. Удар считать абсолютно упругим.

Ответ: $< F > = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{t} = 221$ кН.

ГЛАВА 7. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Любое движение твердого тела сводится к поступательному и вращательному. Это означает, что произвольное движение можно представить в виде суперпозиции поступательного движения тела, характеризуемого движением любой его точки (центра масс), и вращения тела вокруг этой точки (т. е. вокруг осей проходящих через неё).

7.1. Вращательное движение твердого тела относительно точки

Рассмотрим твердое тело как некую систему (рис. 7.1), состоящую из n точек (m_1 m_2 ... m_n); $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-й точки, проведенный из точки O – центра неподвижной инерциальной системы отсчета. Обозначим $\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на i-ю точку, $\vec{F}_{ik}$ – сила действия со стороны k-й точки на i-ю.

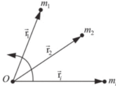


Рис. 7.1. Вращение системы материальных точек вокруг точки O – центра неподвижной инерциальной системы отсчета

Запишем основное уравнение динамики для точки (см. п. 3.6):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\vec{F}_{ik} + \vec{F}_i.$$

Умножим обе части этого уравнения векторно на $\vec{r}_i$:

$$\left[\vec{r}_i, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)\right] = \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Знак производной можно вынести за знак векторного произведения (и знак суммы тоже), тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right] = \sum_k \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Векторное произведение $\vec{r}_i$ *точки на её импульс называется* ***моментом импульса*** (***количества движения***) $\vec{L}_i$ *этой точки относительно точки О*:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i], \text{ или } \vec{L} = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]. \qquad (7.1.1)$$

Для материальной точки массой m момент импульса

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = [\vec{r}, \vec{p}].$$

Три вектора в (7.1.1) образуют правую тройку векторов, связанных «правилом буравчика» (рис. 7.2).

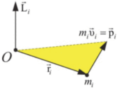


Рис. 7.2. Три взаимно перпендикулярных вектора $\vec{L} = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$; $L_i = p_i r_i$

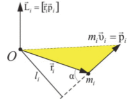


Рис. 7.3. Величина момента импульса $|\vec{L}_i| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl$

Направление вектора $\vec{L}_i$ ортогонально плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}_i$ è $\vec{p}_i$, а величина этого вектора

$$|\vec{L}_i| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl, \qquad (7.1.2)$$

где $l = r\sin\alpha$ – плечо импульса (рис. 7.3).

Векторное произведение $\vec{r}_i$, *проведенного в точку приложения силы, на эту силу, называется* ***моментом силы*** $\vec{M}_i$ (рис. 7.4):

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]. \qquad (7.1.3)$$

Пусть l_i – плечо силы F_i (рис. 7.5). Т. к. $\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$, то

$$|\vec{M}_i| = M_i = F_i r_i \sin\alpha = F_i l_i. \qquad (7.1.4)$$

С учетом новых обозначений

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i.$$

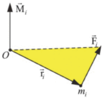


Рис. 7.4. Момент силы $\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$

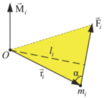


Рис. 7.5. Модуль момента силы $\left|\vec{M}_i\right| = M_i = F_i r_i \sin\alpha = F_i l_i$

Запишем систему n уравнений для всех точек системы и сложим их левые и правые части:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i.$$

Здесь сумма производных равна производной суммы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt},$$

где $\vec{L}$ – момент импульса системы, $\vec{M}$ – результирующий момент всех внешних сил относительно точки O.

Так как

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}, \text{ то } \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} = 0.$$

Отсюда получим ***основной закон динамики вращательного движения твердого тела***, ***вращающегося вокруг точки***.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}. \tag{7.1.5}$$

Это выражение называется ***уравнением моментов***.

Момент импульса системы $\vec{L}$ является основной динамической характеристикой вращающегося тела.

Из сравнения этого уравнения с основным уравнением динамики поступательного движения (п. 3.6),

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F},$$

видно их внешнее сходство.

7.2. Вращательное движение твердого тела относительно оси

Описанное нами движение твердого тела относительно неподвижной точки является основным видом движения. Однако вычислить вектор $\vec{L}$ – момент импульса системы относительно произвольной точки – не просто: надо знать шесть проекций (три задают положение тела, три задают положение точки).

Значительно проще найти момент импульса $\vec{L}$ тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z (рис. 7.6). В этом случае составляющие $\vec{M}$ – момента внешних сил, направленные вдоль x и y, *компенсируются моментами сил реакции закрепления*. Вращение вокруг оси z происходит только под действием $\vec{M}_z$.

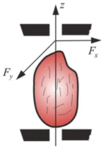


Рис. 7.6. Вращение произвольного тела относительно неподвижной оси z

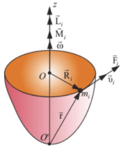


Рис. 7.7. Вращение твердого тела под действием $\vec{M}_z$

Пусть некоторое тело вращается вокруг оси z (рис. 7.7).

Получим уравнение динамики для некоторой точки m_i этого тела, находящегося на расстоянии R_i от оси вращения. При этом помним, что $\vec{L}_z$ и $\vec{M}_z$ направлены всегда вдоль оси вращения z, поэтому в дальнейшем опустим индекс z.

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i, \text{ или } \frac{d}{dt}[\vec{R}, m_i\vec{\upsilon}] = \vec{M}_i.$$

Поскольку $\vec{\upsilon}_i$ у всех точек разная, введем вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, причем $\omega = \frac{\upsilon}{R}$. Тогда $\frac{d}{dt}\left(m_i R_i^2 \vec{\omega}\right) = \vec{M}_i$.

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения m_i и R_i останутся неизменными. Тогда

$$m_i R_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_i.$$

Пусть J_i – ***момент инерции*** точки, находящейся на расстоянии R от оси вращения,

$$J_i = m_i R_i^2. \qquad (7.2.1)$$

Момент инерции *тела служит* ***мерой инертности*** *при вращательном движении*, так же как масса – мера инертности при поступательном движении.

В общем случае тело состоит из огромного количества точек, и все они находятся на разных расстояниях от оси вращения. *Момент инерции* системы (тела) равен:

$$J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс

$$J = \int_0^m R^2 dm = \int_0^V \rho R^2 dV, \qquad (7.2.2)$$

где ρ – плотность тела, dV – объем малого элемента тела массой dm, отстоящего от оси вращения на расстоянии R.

Как видно, момент инерции J – величина скалярная. В СИ момент инерции измеряется в кг·м^2.

Просуммировав (7.2.1) по всем i-м точкам, получим

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M} \text{ или } J\vec{\varepsilon} = \vec{M} \qquad (7.2.3)$$

Это ***основное уравнение динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси***. (Сравним: $m\vec{a} = \vec{F}$ – основное уравнение динамики поступательного движения тела).

Для ***момента импульса*** $\vec{L}$ тела, вращающегося вокруг оси z, имеем:

$$Jd\vec{\omega} = \vec{M}dt;\ Jd\vec{\omega} = d\vec{L},$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \qquad (7.2.4)$$

(Сравним: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – для поступательного движения).

При этом помним, что $\vec{L}$ и $\vec{M}$ – динамические характеристики вращательного движения, направленные всегда вдоль оси вращения. Причем $\vec{L}$ определяется направлением вращения, как и $\vec{\omega}$, а направление $\vec{M}$ зависит от того, ускоряется или замедляется вращение.

7.3. Расчет моментов инерции некоторых простых тел. Теорема Штейнера

По формуле $J = \int R^2 \mathrm{d}m$ не всегда просто удается рассчитать момент инерции тел произвольной формы.

Наиболее легко эта задача решается для тел простых форм, вращающихся вокруг оси, проходящей через центр инерции тела *C*. В этом случае, при вычислении J_c по формуле (6.2.1), появляется коэффициент *k*:

$$J_c = kmR^2.$$

Рассмотрим однородный диск, имеющий радиус *R*, массу *m* и толщину *a*, ось вращения *OO′* которого проходит через центр масс – *C* (рис. 7.8).

Разобьём мысленно диск на малые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины d*r* с внутренним радиусом *r* и внешним (*r* + d*r*). По формуле (7.2.2) найдем момент инерции диска как сумму моментов инерции малых полых цилиндров объемом $2\pi r\mathrm{d}r \cdot a$:

$$J = \int_0^V \rho r^2 \mathrm{d}V = \rho a \int_0^R r^2 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi a \rho \int_0^R r^3 \mathrm{d}r.$$

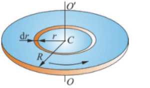


Рис. 7.8. К выводу момента инерции при вращении однородного диска вокруг оси OO′

Интегрируя данное выражение, получим

$$J = \frac{1}{2}\pi a \rho R^4 = \frac{1}{2} mR^2.$$

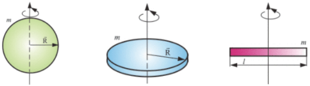
Далее без вывода запишем формулы для вычисления моментов инерции некоторых однородных тел, имеющих массу *m*, когда ось вращения проходит через центр масс (рис. 7.9).

При вычислении момента инерции тела, вращающегося *вокруг оси, не проходящей через центр инерции* (рис. 7.10), следует пользоваться *теоремой о параллельном переносе осей, **теоремой Штейнера***[23]:

$$J = J_c + md^2. \qquad (6.3.1)$$

Момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_c относительно параллельной оси, прохо-

дящей через центр масс С тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.



Шар $k=\frac{2}{5}$; $J_c=\frac{2}{5}mR^2$ Диск $k=\frac{1}{2}$; $J_c=\frac{1}{2}mR^2$ Стержень $k=\frac{1}{12}$

Сфера $J_c=\frac{2}{3}mR^2$ Обруч $J_c=mR^2$ $J_c=\frac{1}{12}ml^2$

Рис. 7.9. Моменты инерции шара, диска, стержня

С помощью теоремы Штейнера, например, можно легко рассчитать момент инерции стержня массой m длиной l вращающегося вокруг оси, проходящей через конец стержня (рис. 7.11).

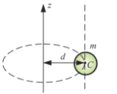


Рис. 7.10. К теореме Штейнера

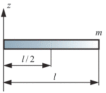


Рис. 7.11. К расчету момента инерции стержня

Момент инерции стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр,

$$J_c=\frac{1}{12}ml^2, \text{ тогда}$$

$$J_z=J_c+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{12}ml+\frac{1}{4}ml^2=\frac{1}{3}ml^2.$$

7.4. Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия – величина аддитивная. Поэтому кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}. \qquad (7.4.1)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то линейная скорость i-й точки $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} R_i$, R_i – расстояние до оси вращения. Следовательно,

$$K_{\text{вращ}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (7.4.2)$$

Сопоставив (7.4.1) и (7.4.2), можно увидеть, что момент инерции тела J является *мерой инертности при вращательном движении*, так же как масса m – *мера инерции при поступательном движении*.

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений – поступательного со скоростью υ_c и вращательного с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. Тогда полная кинетическая энергия этого тела

$$K_{\text{полн}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}. \qquad (7.4.3)$$

Здесь J_c – момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

Применение закона сохранения энергии при скатывании тел с наклонной плоскости

При скатывании тел (например, обруча, сплошного цилиндра, шара) с наклонной плоскости считаем, что скатывающееся тело обладает симметрией вращения относительно геометрической оси и при движении не возникает скольжения (рис. 7.12).

Пусть с наклонной плоскости высотой h без скольжения скатываются: обруч; сплошной цилиндр; шар. Определим скорости, которые будут иметь тела у основания наклонной плоскости. Радиусы тел равны R.

При скатывании тела с наклонной плоскости согласно закону сохранения энергии, потенциальная энергия тела переходит в кинетическую энергию поступательного движения со скоростью υ центра масс и кинетическую энергию вращения вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где m – масса тела, J – момент инерции тела. Учитывая, что

$$\omega = \upsilon / R,$$

получаем

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2mgh}{m + J / R^2}}.$$

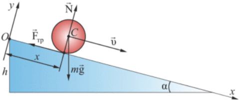


Рис. 7.12. Скатывание тела с наклонной плоскости

Тогда искомая скорость тел $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + J/(mR^2)}}$.

1. Для обруча $J = mR^2$, где $\upsilon = \sqrt{gh}$.
2. Для сплошного цилиндра $J = \dfrac{mR^2}{2}$, $\upsilon = 2\sqrt{\dfrac{gh}{3}}$.
3. Для шара $J = \dfrac{2}{5}mR^2$, $\upsilon = \sqrt{\dfrac{10gh}{7}}$.

7.5. Закон сохранения момента импульса

Для замкнутой системы тел момент внешних сил $\vec{M}$ всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему.

Поэтому $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \equiv 0$, то есть $\vec{L} = \text{const}$ или

$$J\vec{\omega} = \text{const}.$$

Закон сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки* ***не изменяется*** *с течением времени.*

Это один из фундаментальных законов природы.

Аналогично для замкнутой системы тел, вращающихся вокруг оси z:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \equiv 0, \text{ отсюда } \vec{L}_z = \text{const}, \text{ или}$$

$$J_z\vec{\omega} = \text{const}.$$

Если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тождественно равен нулю, то момент импульса относительно этой оси не изменяется в процессе движения.

Момент импульса и для незамкнутых систем постоянен, если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю.

Закон сохранения момента импульса является прямым следствием законов Ньютона и изотропности пространства – эквивалентности свойств пространства в различных направлениях. Существует множество различных задач, связанных с вращающимися системами, в которых скорости вращения или моменты импульса можно вычислить с помощью закона сохранения момента импульса.

Очень нагляден закон сохранения момента импульса в опытах с уравновешенным ***гироскопом*** – *быстро вращающимся телом, имеющим три степени свободы* (рис. 7.13).

Используется гироскоп в различных навигационных устройствах кораблей, самолетов, ракет (гирокомпас, гирогоризонт). Один из примеров навигационного гироскопа изображен на рис. 7.14.

Рис. 7.13. Модель гироскопа

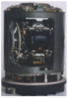


Рис. 7.14. Навигационный гироскоп

Именно закон сохранения момента импульса используется танцорами на льду для изменения скорости вращения. Или еще известный пример – скамья Жуковского[24] (рис. 7.15).

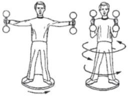


Рис. 7.15. Демонстрация закона сохранения момента импульса с помощью скамьи Жуковского. В силу закона сохранения момента импульса, студент, прижимая к себе гантели, начинает вращаться быстрее,

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$
$$J_1 > J_2$$
$$\omega_1 < \omega_2$$

Изученные нами законы сохранения есть следствие симметрии пространства-времени.

Принцип симметрии был всегда путеводной звездой физиков, и она их не подводила. Но вот в 1956 г. Ву Цзяньсюн[25] обнаружил асимметрию в слабых взаимодействиях: он исследовал β-распад ядер изотопа Co^{60} в магнитном поле и обнаружил, что число электронов, испускаемых вдоль направления магнитного поля, не равно числу электронов, испускаемых в противоположном направлении. В этом же году Л. Ледерман[26] (США) обнаружил нарушение симметрии при распаде пионов и мюонов. Эти факты означают, что законы слабого взаимодействия не обладают зеркальной симметрией.

7.6. Фундаментальность законов сохранения и их связь с симметрией пространства и времени

В предыдущих разделах рассмотрены *три фундаментальных закона природы*: *закон сохранения импульса*, *момента импульса* и *энергии*. Следует понимать, что эти законы выполняются только в инерциальных системах отсчета.

В самом деле, при выводе этих законов мы пользовались вторым и третьим законами Ньютона, а они применимы только в инерциальных системах. Напомним также, что импульс и момент импульса сохраняются в том случае, если система *замкнутая* (сумма всех внешних сил и всех моментов сил равна нулю). Для сохранения же энергии тела условия замкнутости недостаточно – тело должно быть еще и *адиабатически изолированным* (т. е. не участвовать в теплообмене).

Во всей истории развития физики законы сохранения оказались чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими. Эти законы тесно связаны с основными свойствами пространства и времени.

- ***В основе закона сохранения энергии*** лежит ***однородность времени***, т. е. равнозначность всех моментов времени (симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени). Равнозначность следует понимать в том смысле, что замена момента времени t_1 на момент времени t_2, без изменения значений координат и скорости частиц, не изменяет механические свойства системы. Это означает то, что после указанной замены координаты и скорости частиц имеют в любой момент времени $t_2 + t$ такие же значения, какие имели до замены, в момент времени $t_1 + t$.

- ***В основе закона сохранения импульса*** лежит ***однородность пространства***, т. е. одинаковость свойств пространства во всех точках (симметрия по отношению к сдвигу начала координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое, без изменения взаимного расположения и скоростей частиц, не изменяет механические свойства системы.
- ***В основе закона сохранения момента импульса*** лежит ***изотропия пространства***, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям (симметрия по отношению к повороту осей координат). Одинаковость следует понимать в том смысле, что поворот замкнутой системы, как целого, не отражается на её механических свойствах.

И наконец, следует сказать ***о симметрии классической механики*** по отношению к направлению хода времени t – его возрастанию или убыванию. Формально это следует из инвариантности уравнений механики по отношению к замене переменной t на $-t$.

В самом деле, исходное уравнение ньютоновской механики – уравнение второго закона Ньютона,

$$d\vec{p}/dt = \vec{F}.$$

Оно полностью сохраняет свой вид, если произвести замену t на $t' = -t$ и $\vec{p}$ на $\vec{p}' = -\vec{p}$, т. е. изменить направление хода времени, а также изменить направление движения материальной точки на противоположное:

$$d\vec{p}'/dt' = \vec{F}.$$

Эта симметрия уравнений классической механики свидетельствует об *обратимости механических процессов*: если механическая система совершает какое-либо движение, то она может под действием тех же сил совершать и прямо противоположное движение, при котором будет проходить через те же самые промежуточные конфигурации в обратном порядке.

Между законами типа основного уравнения динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как ***принципы запрета***: *любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.*

Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникающая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом деле такой процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно станет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадётся на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс оставался в покое, – а только этого и требует закон сохранения импульса.

Итак, для того чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно распасться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на части, то его внутренняя энергия и масса покоя будут постоянными величинами.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями.

7.7. Сходство и различие линейных и угловых характеристик движения и связь между ними

Основные величины и уравнения кинематики и динамики вращательного движения легко запоминаются если сопоставить их с величинами и уравнениями поступательного движения (см. табл. 7.1). В таблице так же приведена связь между линейными и угловыми характеристиками движения. Кроме того, в таблице приведены формулы для расчета кинетической и потенциальной энергий.

Таблица 7.1

Поступательное движение		Вращательное движение	
Кинематика			
Путь	$s = \int_0^t \upsilon dt$ $s = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	Угол поворота	$\varphi = \int_0^t \omega dt$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$
Скорость	$\upsilon = \frac{ds}{dt}$ $\upsilon = \upsilon_0 \pm at$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
Ускорение	$a = \frac{d\upsilon}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
$s = R\varphi$; $\upsilon = R\omega$; $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; $a_n = \upsilon^2/R = \omega^2 R$; $a_\tau = R \cdot \varepsilon$			
Динамика			
Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $J\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{\upsilon} = \mathrm{const}$	Закон сохранения момента импульса	$J\vec{\omega} = \mathrm{const}$
Работа	$A = F \cdot s$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Мощность	$N = F \cdot \upsilon$	Мощность	$N = M \cdot \omega$
Кинетическая энергия	$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{P^2}{2m}$	Кинетическая энергия вращ. тела	$E_k = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$
Энергия тела, катящегося с высоты h		$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$	
Потенциальная энергия сжатой пружины		$E_n = \frac{kx^2}{2}$	
Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия		$E_n = \gamma \frac{M \cdot m}{r}$; $E_n = mgh$	

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление вектора момента импульса?

2. Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?

3. Что такое момент инерции тела?

4. Какова роль момента инерции во вращательном движении?

5. Выведите формулу для момента инерции обруча.

6. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.

7. Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?

8. Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

9. В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.

10. Каким свойством симметрии пространства и времени обусловливается справедливость закона сохранения момента импульса?

11. В каком случае закон сохранения момента импульса можно применять к неизолированной системе?

12. Каким свойством пространства обуславливается справедливость закона сохранения момента импульса?

13. Какими физическими обстоятельствами обуславливается возможность применения закона сохранения момента импульса к неизолированной системе?

14. Твердое тело с моментом инерции J вращается с угловым ускорением ε вокруг своей оси и мгновенной угловой скоростью ω. Чему равна мощность, сообщенная телу?

15. Обод велосипедного колеса диаметром 0,8 м имеет массу 1,5 кг. Чему равен момент импульса колеса, если скорость велосипеда 3 м/с?

16. Где следует посадить ребенка массой 30 кг, чтобы уравновесить 4-метровые качели (масса отца 80 кг, а матери – 50 кг)?

Примеры решения задач

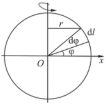
Задача* 7.1. Найти момент инерции обруча, радиус которого равен R = 30 см и масса m = 200 г относительно оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости кольца.

Дано:
$R = 0{,}3$ м
$m = 0{,}2$ кг
J – ?

Решение. Момент инерции находится по формуле момента инерции для сплошного однородного тела:

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m .$$

Интегрирование данного выражения производится по всем точкам тела, где r – расстояние от выбранной точки до оси вращения.



Выделим на обруче элемент длиной dl, массой $\mathrm{d}m = \dfrac{m}{2\pi R}\mathrm{d}l$. Положение элемента d$l$ относительно центра обруча можно определить углом φ и радиус вектором $\vec{r}$. При этом dl = Rdφ, r = Rcosφ. Из этого следует

$$\mathrm{d}l = \frac{m}{2\pi R}\int R(\cos\varphi)^2 R\mathrm{d}\varphi .$$

Для нахождения момента инерции обруча интегрируем это выражения в пределах от $\varphi_1 = (-\pi/2)$ до $\varphi_2 = (\pi/2)$. Полученный результат удваиваем:

$$J = 2\cdot\frac{mR^2}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{mR^2}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = \frac{mR^2}{2\pi}\left[\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi\right] =$$

$$= \frac{mR^2}{2\pi}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{mR^2}{2\pi}(\pi + \sin\pi) = \frac{mR^2}{2} = \frac{0{,}2\cdot(0{,}3)^2}{2} = 9\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $J = 9\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Задача 7.2. Горизонтальная платформа, масса которой m_1 = 250 кг, имеет форму диска, радиус которого R = 2,5 м. Платформа может вращаться относительно оси, проходящей через её центр. Какая будет угловая скорость ω платформы, если вдоль её края будет двигаться человек массой m = 75 кг со скоростью υ = 2,5 м/с относительно платформы?

Дано:
$m_1 = 250$ кг
$m_2 = 75$ кг
$R = 2{,}5$ м
$\upsilon = 2{,}5$ м/с
ω – ?

Решение. Согласно условию задачи платформа, на которой находится человек, вращается по инерции. Это говорит о том, что момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю. Систему «платформа – человек» будем считать замкнутой. Применим к этой системе закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}_ч + \vec{L}_п = 0,$$

где $\vec{L}_ч = m_2 \upsilon R$ – момент импульса человека относительно оси вращения платформы; $\vec{L}_п$ – момент импульса платформы с человеком:

$$\vec{L}_п = \omega\left(J_п + J_ч\right),$$

где $J_п = \frac{1}{2} m_1 R^2$, $J_ч = m_2 R^2$ – момент инерции платформы и человека, соответственно.

Получаем:

$$m_2 \upsilon R^2 = \omega\left(\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 R^2\right). \qquad (1)$$

Проверим размерность: $[\omega] = \left[\frac{кг \cdot м}{м \cdot с \cdot кг}\right] = с^{-1}$.

Из уравнения (1) находим угловую скорость:

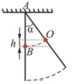
$$\omega = \frac{m_2 \upsilon}{(1/2) \cdot m_1 R + m_2 R} = \frac{2 m_2 \upsilon}{R(m_1 + 2m_2)}, \quad \omega = \frac{2 \cdot 75 \cdot 2{,}5}{2{,}5(250 + 2 \cdot 75)} = 37{,}5 \cdot 10^{-2}\ с^{-1}.$$

Ответ: $\omega = 37{,}5 \cdot 10^{-2}\ с^{-1}$.

Задача 7.3. Тонкий однородный стержень длиной l = 0,8 м имеет горизонтальную ось вращения, проходящую через его конец. Найдите скорость нижней точки стержня, когда стержень проходит положение равновесия при отклонении его от вертикали на угол α = 30°.

Дано:
l = 0,8 м
α = 30°

υ – ?



Решение. При отклонении стержня на угол α от положения равновесия его центр поднимется на высоту h, которую можно определить из треугольника AOB:

$$\frac{l}{2} - h = \frac{1}{2}\cos\alpha, \quad h = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha).$$

При этом потенциальная энергия стержня увеличивается на величину $\Delta U = mgh$, где m – масса стержня.

При прохождении стержнем положения равновесия потенциальная энергия ΔU переходит в кинетическую энергию:

$$K = J\omega^2/2,$$

где J – момент инерции стержня; ω – угловая скорость вращения стержня.

Для стержня, ось вращения которого проходит через его конец,

$$J = (1/3) m l^2.$$

По закону сохранения энергии

$$K = \Delta U.$$

Из выше указанных уравнений получим:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)=\frac{1}{6}ml^2\omega^2 \text{ или } g(1-\cos\alpha)=\frac{1}{3}l\omega^2.$$

Из этого уравнения найдем угловую скорость:

$$\omega=\sqrt{\frac{3g(1-\cos\alpha)}{l}}.$$

Проверим размерность: $[\upsilon]=\sqrt{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}}=\frac{\text{м}}{\text{с}}.$

Линейная скорость: $\upsilon=\omega l=\sqrt{3gl(1-\cos\alpha)}$,

$$\upsilon=\sqrt{3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}8(1-\cos 30^\circ)}=1{,}78\ \text{м/с}.$$

Ответ: $\upsilon=1{,}78$ м/с.

Задача 7.4. На барабан массой M = 9 кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 2 кг. Считая барабан однородным цилиндром и пренебрегая трением, определите ускорение груза.

Дано:
M = 9 кг
m = 2 кг
a – ?

Решение: Согласно закону сохранения энергии при опускании груза его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию груза и кинетическую энергию вращения барабана:

$$mgh=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}, \tag{1}$$

где J – момент инерции барабана.

Учитывая, что $J=\frac{Mr^2}{2}$, $\omega=\frac{\upsilon}{r}$, где r – радиус барабана, запишем уравнение (1) в виде

$$mgh=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{M\upsilon^2}{4}=\frac{\upsilon^2}{2}\left(m+\frac{M}{2}\right). \tag{2}$$

Груз опускается под действием постоянной силы, поэтому его движение равноускоренное, следовательно

$$h=at^2/2, \tag{3}$$

$$\upsilon=at. \tag{4}$$

Подставим (3) и (4) в (2):

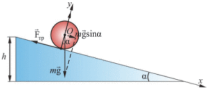
$$mg\frac{at^2}{2}=\frac{a^2t^2}{2}\left[m+\frac{M}{2}\right]. \tag{5}$$

Из уравнения (5) получим искомое ускорение груза $a = \dfrac{2mg}{M + 2m}$.

Проверим размерность: $[a] = \left[\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}\right] = \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. $a = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 9{,}8}{9 + 2 \cdot 2} = 3{,}02$ м/с^2.

Ответ: $a = 3{,}02$ м/с^2.

Задача 7.5. Круглое однородное тело (обруч, цилиндр, шар) радиусом R и массой m скатывается без скольжения по наклонной плоскости под углом α к горизонту с высоты h (рис). Начальная скорость тела равна нулю. Найти скорость центра масс в конце спуска. У какого из тел (обруч, цилиндр, шар) конечная скорость будет наибольшей и наименьшей?



Решение: Используем закон сохранения полной энергии. В конце спуска тело приобретает кинетическую энергию

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\upsilon^2}{2R^2} = \frac{m\upsilon^2}{2}\left(1 + \frac{J}{mR^2}\right).$$

Эта кинетическая энергия приобретена за счет потенциальной энергии mgh. Отсюда следует выражение для скорости в конце спуска:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + J/mR^2}}.$$

Подставляя сюда моменты инерции обруча $(J = mR^2)$, цилиндра $(J = mR^2/2)$ и шара $(J = 0{,}4mR^2)$, находим

$$\upsilon_{обр} = \sqrt{gh},\ \upsilon_{цил} = \sqrt{\frac{4}{3}gh},\ \upsilon_{шар} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

Ответ: скорость обруча наименьшая;
скорость шара наибольшая.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.1. Три маленьких шарика массой m = 10 г каждый расположен в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 20 см и скреплены между собой. Определить момент инерции J системы относительно оси: 1) перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности; 2) лежащей в плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности и одну из вершин треугольника. Массой стержней, соединяющих шары, пренебречь.

Ответ: $J = ma^2$; 1) $4 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2; 2) $2 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2.

Задача 7.2. Найти момент J тонкого однородного кольца радиусом R = 20 см и массой m = 100 г относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр.

Ответ: $J = mR^2/2 = 0{,}002$ кг·м^2.

Задача 7.3. Определить момент инерции J кольца массой m = 50 г и радиусом R = 10 см относительно оси, касательной к кольцу.

Ответ: $J = (3/2)mR^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ кг·м^2.

Задача 7.4. Диаметр диска d = 20 см, масса m = 800 г. Определить момент инерции J диска относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости дисков.

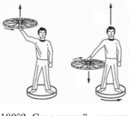
Ответ: $J = (3/4)mR^2 = 6 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2.

Задача 7.5. Определить момент инерции тонкой J плоской пластины со сторонами a = 10 см и b = 20 см относительно оси, проходящей через центр масс пластины параллельно большей стороне. Масса пластины равномерно распределена по её площади с поверхностной плотностью σ = 1,2 кг/м^2.

Ответ: $J = \sigma a^3 b/12 = 2 \cdot 10^{-5}$ кг·м^2.

Задача 7.6. Тонкий однородный стержень длиной l = 50 см и массой m = 400 г вращается с угловым ускорением ε = 3 рад/с^2 около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент M.

Ответ: $M = ml^2\varepsilon = 0{,}025$ Н·м.



Задача 7.7. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамьи. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой n = 10 с$^{-1}$. Радиус R колеса равен 20 см, его масса m = 3 кг. Определить частоту вращения n_2 скамьи, если человек повернет стержень на угол 180°? Суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2. Массу колеса можно считать равномерно распределенной по ободу.

Ответ: $n_2 = 2mR^2 n_1/(J + mR^2) = 0{,}392$ с$^{-1}$.

Задача 7.8. Кинетическая энергия $E_к$ вращающегося маховика равна 1 кДж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равномерно и, сделав N = 80 оборотов, остановился. Определить момент M силы торможения.

Ответ: $M = T/(2\pi N) = 1{,}99$ Н·м.

Задача 7.9. Сплошной цилиндр массой m = 4 кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость υ оси цилиндра равна 1 м/с. Определить полную кинетическую энергию $E_к$ цилиндра.

Ответ: $E_к = 3m\upsilon^2/4 = 3$Дж.

Задача 7.10. Платформа в виде сплошного диска радиусом R = 1,5 м и массой M = 180 кг вращается по инерции вокруг вертикальной оси с частотой n = 10 об/мин. В центре платформы стоит человек массой m = 60 кг. Какую линейную скорость будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Ответ: $\upsilon = \dfrac{2\pi MnR}{M + 2m} = 1$ м/с.

Задача* 7.11. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу M = 80 г, перекинута тонкая гибкая нерастяжимая нить. К концам нити присоединены грузы, массы которых, соответственно, равны m_1 = 100 г и m_2 = 200 г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если систему предоставить самой себе?

Ответ: $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2}g = 2{,}88$ м/с^2.

Задача* 7.12. Гироскоп длиной l вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Момент инерции гироскопа J_0. К концу гироскопа приложена сила $\vec{F}$, перпендикулярная вектору $\vec{\omega}$, действующая в течение короткого времени Δt. Найти угол, на который отклонится ось гироскопа.

Ответ: $\Delta\Theta = \dfrac{Fl}{J_0\omega}\cdot\Delta t$.

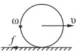
Задача 7.13. На метровой доске расположены три груза массами m_1 = 1 кг, m_2 = 2 кг и m_3 = 3 кг. Грузы массой m_1 и m_3 расположены на концах доски, а груз m_2 находится в полуметре от груза m_1. Определить положение опоры, при котором система будет находиться в равновесии.

Ответ: $x = \dfrac{(m_1 + m_2)L - m_2 l}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}33$ м.

Задача* 7.13. Электрон имеет собственный момент импульса (спин), проекция которого на произвольное направление равна половине постоянной Планка, т. е. $L = \hbar/2 = 5{,}25 \cdot 10^{-35}$ Дж·с. Учитывая, что скорость света в вакууме есть предельная скорость движения, показать несостоятельность модели, согласно которой спин является результатом вращения электрона.

$$r > \frac{5L}{2mc} = 4{,}8 \cdot 10^{-13}.$$

Задача* 7.14. Цирковой артист бросает на арену обруч массой m и радиусом R, который катится в горизонтальном направлении со скоростью υ. При этом обручу придано обратное вращение с угловой скоростью ω. При какой угловой скорости обруч после остановки покатится назад к артисту? Найти конечную скорость υ_f поступательного движения обруча.



Ответ: $\omega > \upsilon/R$; $\upsilon_f = \upsilon - \omega R/2$.

Вселенная – это сфера, центр которой повсюду, а граница – нигде.

Б. Паскаль

ГЛАВА 8. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

Все тела в природе взаимно притягивают друг друга. Это взаимодействие называется гравитационным и является одним из фундаментальных взаимодействий в природе. Мы знаем о нем очень мало, гораздо меньше, чем, например, об электромагнитном взаимодействии. Тем не менее, на уровне механики мы можем описать гравитацию.

8.1. Теория тяготения Ньютона

Рассмотрим более подробно гравитационные силы – один из видов фундаментальных сил.

Первые высказывания о тяготении как о всеобщем свойстве материи относятся к античности. В XVI–XVII вв. в Европе возродились попытки доказать существование взаимного тяготения тел. Немецкий астроном И. Кеплер[27] говорил, что «тяготение есть взаимное стремление всех тел». Классическая формулировка ***закона всемирного тяготения*** была дана И. Ньютоном в 1687 году в его труде «Математические начала натуральной философии».

Согласно этому закону, ***сила, с которой два тела притягиваются друг к другу, пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними***:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{8.1.1}$$

где γ – коэффициент пропорциональности, называемый *гравитационной постоянной*.

Надо помнить, что силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.

В данном случае тела, о которых шла речь, представляют собой материальные точки. Для определения силы взаимодействия тел, которые не могут рассматриваться как материальные точки, их нужно разбить на элементарные массы Δm, каждую из которых можно было бы принять за материальную точку (рис. 8.1).

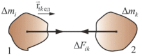


Рис. 8.1. К определению силы взаимодействия тел произвольной формы 1 и 2

Тогда i-я элементарная масса тела 1 притягивается к k-й элементарной массе тела 2 с силой

$$\Delta\vec{F}_{ik} = \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{r}_{ik\,\text{ед}}, \quad (8.1.2)$$

где $\vec{r}_{ik\,\text{ед}}$ – единичный вектор (орт), направленный от Δm_i к Δm_k.

Просуммировав последнее выражение по всем значениям k, получим результирующую всех сил, действующую со стороны тела 2 на принадлежащую телу 1 элементарную массу Δm_i:

$$\Delta\vec{F}_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\gamma\frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{r}_{ik\,\text{ед}}. \quad (8.1.3)$$

Наконец, просуммировав полученное выражение по всем значениям индекса i, то есть, сложив силы, приложенные ко всем элементарным массам первого тела, получим силу, с которой тело 2 действует на тело 1.

$$\vec{F}_{12} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma\frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{r}_{ik\,\text{ед}}. \quad (8.1.4)$$

Суммирование производилось по всем значениям i и k. Следовательно, если тело 1 разбить на n_1, а тело 2 на n_2 элементарных масс, то сумма будет содержать $n_1 \cdot n_2$ слагаемых. Практически суммирование сводится к интегрированию и является довольно сложной математической задачей.

Если взаимодействующие тела представляют собой однородные шары, то вычисление последней суммы приводит к следующему результату:

$$\vec{F}_{12} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_{12}, \quad (8.1.5)$$

где r – расстояние между центрами шаров, $\vec{r}_{12}$ – единичный вектор от центра шара 1 к центру шара 2.

Таким образом, в упрощенном варианте шары действуют как материальные точки, помещенные в их центры и имеющие их массы.

Если одно из тел представляет собой шар очень больших размеров радиусом R (Земной шар), а второе тело имеет размеры гораздо меньше R и находится вблизи поверхности большого шара, то их взаимодействие описывается последней формулой, где $r = R_З$ (рис. 8.2).

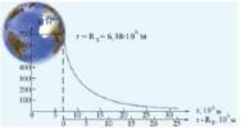


Рис. 8.2. Сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния

Физический смысл гравитационной постоянной в том, что сила равна силе в 6,67·10^{−11} Н, с которой два тела массой 1 кг каждое, центры которых отдалены на расстояние 1 м, взаимно притягиваются друг к другу.

Гравитационная постоянная γ была определена впервые Генри Кавендишем[26] в 1798 г. с помощью изобретенных им крутильных весов (рис. 8.3). На рис. 8.4 изображены современные торсионные весы, на которых ученые Вашингтонского университета уточняют значение гравитационной постоянной.

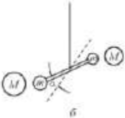


Рис. 8.3. Опыт Кавендиша по определению гравитационной постоянной

Рис. 8.4. Современные торсионные весы, используемые для уточнения величины γ

Наиболее точным из определенных опытным путём считается значение $\gamma = (6{,}67428 \pm 0{,}00067)\cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}^{-1}$.

8.2. Поле тяготения. Напряженность гравитационного поля

Закон всемирного тяготения, устанавливая зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, не даёт ответа на вопрос о том, как осуществляется это взаимодействие.

Тяготение (гравитационное взаимодействие), в отличие от таких механических взаимодействий, как удар, трение и т. д., принадлежит к особой группе взаимодействий. Оно *проявляется между телами, удаленными друг от друга. Причем сила тяготения не зависит от того, в какой среде эти тела находятся.* Тяготение существует и в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью ***поля тяготения (гравитационного поля)***.

Физики до XIX века считали, что абсолютно пустого пространства не существует, что все заполнено какой-то средой, например мировым эфиром, через который и осуществляется взаимодействие. Однако к XX веку выяснилось, что нет никакого эфира, через который якобы передается взаимодействие. Современная физика утверждает, что *силовые взаимодействия осуществляются полями*, то есть тело 1 возбуждает в окружающем пространстве силовое поле, которое в месте нахождения тела 2 проявляется в виде действующих на него сил. В свою очередь тело 2 возбуждает аналогичное силовое поле, действующее на тело 1.

Поле *– это объективная реальность, посредством которой передаётся взаимодействие.* ***Поле****, наряду с* ***веществом****, является одним из* ***видов материи***.

Итак, гравитационное поле порождается телами и, так же как вещество и другие физические поля (например, электромагнитное), является одной из форм материи.

Основное свойство поля тяготения, которое отличает его от других полей, состоит в том, что на любую материальную точку массой m, внесенную в это поле, действует сила притяжения F, пропорциональная m: $\vec{F} = m\vec{G}$. Отсюда

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}, \qquad (8.2.1)$$

где $\vec{G}$ – вектор, названный ***напряженностью поля тяготения***.

Вектор напряженности $\vec{G}$ *численно равен силе, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает с этой силой по направлению.*

Вектор напряженности является силовой характеристикой гравитационного поля и изменяется при переходе от одной точки поля к другой. *Поле тяготения является* ***центральным*** и ***сферически симметричным***.

Поле называется ***центральным****, если во всех его точках векторы напряжённости направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной и той же точке O, неподвижной относительно какой-либо инерционной системы отсчета. Точка O называется центром сил.*

Центральное поле называют ***сферически симметричным****, если численное значение вектора напряженности зависит только от расстояния r до центра сил O:* $G = G(r)$.

При наложении нескольких полей тяготения напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей всех этих полей:

$$\vec{G} = \sum \vec{G}.$$

Этот принцип вытекает из принципа независимости действия сил и называется *принципом суперпозиции* (*наложения полей*).

8.3. Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

Силы тяготения являются консервативными. Это значит, что работа в поле этих сил пропорциональна произведению масс m и M материальных точек и зависит только от начального и конечного положения этих точек. Покажем это на простом примере (рис. 8.5).

Определим работу, совершенную силами поля тяготения при перемещении в нём материальной точки массой m (работу по удалению материальной точки массой m от Земли массой M на расстояние r).

На данную точку в положении 1 действует сила $F = \gamma mM / r^2$.

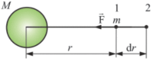


Рис. 8.5. К определению работы сил гравитационного поля при перемещении материальной точки массы m из положения 1 в положение 2

При перемещении этой точки на расстояние dr совершается работа

$$\mathrm{d}A = -\gamma \frac{mM}{r^2} \mathrm{d}r$$

(знак минус показывает, что сила и перемещение противоположны). Тогда общая работа

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}A = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} \mathrm{d}r = m\left(\gamma \frac{M}{r_2} - \gamma \frac{M}{r_1}\right). \qquad (8.3.1)$$

Эта формула показывает, что затраченная работа не зависит от траектории, а зависит лишь от координат точки.

Работа консервативных сил при перемещении точки т вдоль произвольного замкнутого контура L тождественно равна нулю:

$$\oint_L (\vec{F}, d\vec{r}) \equiv 0 \text{ или } \oint_L (\vec{G}, d\vec{r}) \equiv 0. \qquad (8.3.2)$$

Эти интегралы называются *циркуляцией* соответствующих векторов $\vec{F}$ и $\vec{G}$ вдоль замкнутого контура. Равенство нулю этих циркулирующих векторов является *необходимым и достаточным* признаком консервативности силового поля $\vec{F}$.

Из (8.3.1) следует, что *работа A, совершенная консервативными силами, равна уменьшению потенциальной энергии системы*. В нашем случае работа равна уменьшению потенциальной энергии U материальной точки, перемещающейся в поле тяготения.

$$A_{12} = -\Delta E_п = E_{п1} - E_{п2}, \text{ или } dA = -dE_п.$$

В случае поля тяготения создаваемого материальной точкой с массой M

$$E_{п1} - E_{п2} = -\gamma mM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (8.3.3)$$

При рассмотрении гравитационного поля Земли формулу (8.3.3) можно переписать в виде

$$\mathring{A}_{\text{ï}} - \mathring{A}_{\text{ï.Ç}} = mgR_{\text{Ç}}^2\left(\frac{1}{R_{\text{Ç}}} - \frac{1}{r}\right). \qquad (8.3.4)$$

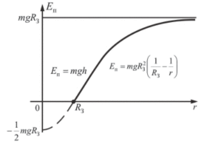


Рис. 8.6. Зависимость потенциальной энергии гравитационного поля от расстояния до центра Земли

Принято считать, что потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю (рис. 8.6). Штрихованной линией здесь показана потенциальная энергия внутри Земли. При $r = 0$, в центре Земли:

$$A_1 - A_{1,C} = -\frac{1}{2} mgR_C.$$

Если условиться считать, что потенциальная энергия точки m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от источника поля точки M, тогда из (8.3.3) получаем

$$\lim_{r_2 \to \infty} E_{п} = 0 \text{ и } E_{п1} = -\gamma \frac{mM}{r_1},$$

или, в силу произвольности выбора точки 1,

$$E_{п} = -\gamma \frac{mM}{r}. \qquad (8.3.5)$$

Величину $E_{п}$ называют ***взаимной*** *потенциальной энергией* обеих точек.

Величина φ равна отношению потенциальной энергии материальной точки в поле тяготения к массе m:

$$\varphi = \frac{E_{п}}{m} = -\sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{m_i}{r_i}, \qquad (8.3.6)$$

является энергетической характеристикой самого поля тяготения и называется ***потенциалом поля тяготения.***

По аналогии с потенциалом электростатического поля, роль заряда здесь выполняет масса m. Потенциал – величина скалярная.

Потенциал поля тяготения, созданный одной материальной точкой с массой M, равен $\varphi = -\gamma \frac{M}{r}$, где r – расстояние от этой точки до рассматриваемой точки поля.

Из сопоставления двух последних соотношений следует

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

т. е. потенциал в некоторых точках поля, являющегося результатом наложения полей, равен сумме потенциалов в этой точке, соответствующих каждому из полей в отдельности (принцип суперпозиции).

Между двумя характеристиками поля тяготения – напряженностью и потенциалом – существует взаимосвязь. Найдем её.

Из выражений (8.2.1) и (8.3.6.) следует, что $\vec{F} = m\vec{G}$, а $E_{п} = m\varphi$.

Так как $\vec{F} = -\nabla E_{п}$ (5.3.7.), то $m\vec{G} = -m\nabla\varphi$, откуда

$$\vec{G} = -\nabla\varphi.$$

Таким образом, вектор напряженности $\vec{G}$ может быть выражен как градиент скалярной функции гравитационного потенциала φ.

$$\vec{G} = -\mathrm{grad}\varphi, \tag{8.3.7}$$

где
$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Здесь вектор, называемый градиентом потенциала со знаком минус, показывает, что в каждой точке поля тяготения вектор напряженности $\vec{G}$ направлен в сторону *наиболее быстрого убывания потенциала*.

Гравитационное поле можно изобразить с помощью *силовых линий* и *эквипотенциальных поверхностей* (рис. 8.7).

Эквипотенциальные поверхности *– геометрическое место точек с одинаковым потенциалом. Линии напряженности* $\vec{G}$ (*силовые линии поля*) всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Графическая зависимость напряженности гравитационного поля Земли (и ускорения a) от расстояния до центра Земли изображена на рис. 8.8.

Из рисунка видно, что внутри Земли $\vec{G}$ растет пропорционально r, а вне Земли убывает $\sim 1/r^2$. Так же и ускорение $a = gr/R_З$ – внутри Земли; $a = gR_З^2/r^2$ – вне Земли.

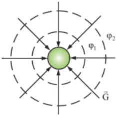


Рис. 8.7. Линии напряженности $\vec{G}$ и эквипотенциальные поверхности φ_1 и φ_2 гравитационного поля

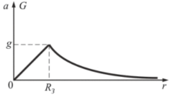


Рис. 8.8. Зависимость напряженности $\vec{G}$ и ускорения $\vec{a}$ от расстояния до центра Земли

Закон всемирного тяготения и механика Ньютона явились величайшим достижением естествознания. Они с большой точностью описывают обширный круг явлений, в том числе движение в иных системах небесных тел – двойных звезд в звездных скоплениях, галактиках. На основе теории тяготения Ньютона было предсказано существование планеты Нептун, спутников Сириуса и др. В астрономии закон тяготения Ньютона является фундаментом, на основе которого вычисляются движение, строение и эволюция небесных тел. Однако, в некоторых случаях, поле тяготения и движение физических объектов в полях тяготения не может быть описано законами Ньютона. Сильные гравитационные поля и движение в них с большими скоростями $\upsilon \approx c$ описываются в общей теории относительности (ОТО), созданной А. Эйнштейном.

8.4. Принцип эквивалентности масс*

Понятие «масса» фигурирует в двух разных законах – во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения.

В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором – гравитационные свойства, то есть способность тел притягиваться друг к другу. В связи с этим возникает вопрос, не следует ли различать ***инертную массу*** m_{in} и ***массу гравитационную*** (или тяготеющую) m_g? Ответ на этот вопрос может дать только опыт.

Всякое тело вблизи поверхности Земли испытывает силу притяжения

$$F = \gamma \frac{m_g M}{R_З^2} = m_g g. \tag{8.4.1}$$

Под действием этой силы тело приобретает ускорение:

$$a = \frac{F}{m_{in}} = \gamma \frac{M}{R_З^2} \frac{m_g}{m_{in}} = g \frac{m_g}{m_{in}}. \tag{8.4.2}$$

Опыт показывает, что ускорение a для всех тел в гравитационном поле одинаково: $a = g$. Следовательно, и $m_g = m_{in}$, при надлежащем выборе единиц измерения. Поэтому говорят просто о массе.

Постоянство отношения m_g/m_{in} для всех тел является характерной особенностью гравитационного поля.

- 1867 г. Ньютон доказал это равенство с точностью до 10^{-3}.
- 1901 г. Венгерский физик Этвеш[29] получил такое совпадение с точностью до 10^{-8}.
- 1964 г. Американский ученый Дикке[30] улучшил точность измерения в 300 раз.

Тождественность ***инерциальной*** *и* ***гравитационной*** *масс Эйнштейн положил в основу общей теории относительности.*

Следствием этого является тот факт, что, находясь внутри закрытой кабины, невозможно определить, чем вызвана сила mg: тем, что кабина движется с ускорением $a = g$ или действием притяжения Земли?

8.5. Законы Кеплера. Космические скорости

Еще в глубокой древности было замечено, что, в отличие от звезд, которые неизменно сохраняют свое взаимное расположение в пространстве в течение столетий, планеты описывают среди звезд сложнейшие траектории. Для объяснения петлеобразного движения планет древнегреческий ученый К. Птоломей[31] (II в. н. э.), считая Землю расположенной в центре Вселенной, предположил, что каждая из планет движется по малому кругу (эпициклу), центр которого равномерно движется по большому кругу, в центре которого находится Земля. Эта концепция получила название *птоломеевой или геоцентрической системой мира.*

В начале XVI века польским астрономом Н. Коперником обоснована *гелиоцентрическая система*, согласно которой движения небесных тел объясняются движением Земли (а также других планет) вокруг Солнца и суточным вращением Земли (рис. 8.9).

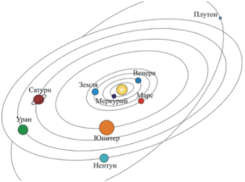


Рис. 8.9. Гелиоцентрическая система мира

Теория наблюдения Коперника воспринималась как занимательная фантазия. В XVI в. это утверждение рассматривалось церковью как ересь. Известно, что Дж. Бруно[32], открыто выступивший в поддержку гелиоцентрической системы Коперника, был осужден инквизицией и сожжен на костре.

Однако к началу XVII столетия большинство ученых убедились в справедливости гелиоцентрической системы мира. Иоганн Кеплер, обработав результаты многочисленных наблюдений, проведенных Тихо Браге[33] (которого называют «человеком, измерившим небо»), получил законы движения планет вокруг Солнца.

Кеплер Иоганн (1571–1630) – немецкий ученый, один из творцов небесной механики. Работы в области астрономии, механики, математики. Используя наблюдения Тихо Браге и свои собственные, открыл законы движения планет (три закона Кеплера). Известен как конструктор телескопа (так называемая зрительная труба Кеплера, состоящая из двух двояковыпуклых линз).

Закон всемирного тяготения был открыт Ньютоном на основе трех законов Кеплера.

Первый закон Кеплера. *Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце* (рис. 8.10).

Второй закон Кеплера. *Радиус-вектор планеты описывает в равные времена равные площади* (рис. 8.11).

Третий закон Кеплера. *Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.*

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3. \tag{8.5.1}$$

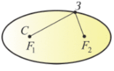


Рис. 8.10. Эллиптическое движение Земли вокруг Солнца. F_1 и F_2 – фокусы эллипса

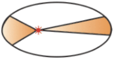


Рис. 8.11. Равные площади, описанные радиус-вектором за равные времена

Почти все планеты (кроме Плутона, который по современным представлениям уже не считается планетой) движутся в одной плоскости по орбитам, близким к круговым. Для круговых орбит первый и второй законы Кеплера выполняются автоматически, а третий закон утверждает, что $T^2 \sim R^3$ (T – период обращения; R – радиус орбиты).

Ньютон решил *обратную задачу механики* и из законов движения планет получил выражение для гравитационной силы:

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2}. \tag{8.5.2}$$

Как нам уже известно, гравитационные силы являются *консервативными.* При перемещении тела в гравитационном поле консервативных сил по замкнутой траектории работа равна нулю. Свойство консервативности гравитационных сил позволило нам ввести понятие *потенциальной энергии.*

Потенциальная энергия тела массой m, расположенного на расстоянии r от большого тела массой M, есть

$$E_п = -\gamma \frac{Mm}{r}. \tag{8.5.3}$$

Если тело находится в гравитационном поле на некотором расстоянии r от центра тяготения и имеет некоторую скорость υ, его *полная механическая энергия* равна сумме кинетической и потенциальной энергий и, в соответствии с законом сохранения энергии, *остается неизменной*:

$$E = E_к + E_п = \frac{m\upsilon^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const}. \tag{8.5.4}$$

Полная энергия может быть положительной и отрицательной, а также равняться нулю. Знак полной энергии определяет характер движения небесного тела.

При $E < 0$ тело не может удалиться от центра притяжения на расстояние $r_0 > r_{\max}$. В этом случае небесное тело движется по *эллиптической орбите* (спутники планет, планеты Солнечной системы, кометы) (рис. 8.12).

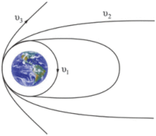


Рис. 8.12. Траектории движения тел с различными космическими скоростями

Период обращения небесного тела по эллиптической орбите равен периоду обращения по круговой орбите радиусом R, где R – большая полуось орбиты.

При $E = 0$ тело движется по *параболической траектории*. Скорость тела на бесконечности равна нулю.

При $E > 0$ движение происходит по *гиперболической траектории*. Тело удаляется на бесконечность, имея запас кинетической энергии.

Первой космической скоростью *называется скорость движения тела по круговой орбите вблизи поверхности Земли* (рис. 8.12). Для этого, как следует из второго закона Ньютона, центробежная сила должна уравновешиваться гравитационной силой:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{R_C} = \gamma \frac{Mm}{R_C^2} = gm, \text{ отсюда } \upsilon_1 = \sqrt{gR_з} = \sqrt{9{,}81 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6} \approx 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Второй космической скоростью *называется скорость движения тела по параболической траектории. Она равна минимальной скорости, которую нужно сообщить телу на поверхности Земли, чтобы оно, преодолев земное притяжение, стало искусственным спутником Солнца (искусственная планета).* Для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия тела была не меньше работы по преодолению тяготения Земли:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = \int_R^\infty G\frac{mM}{r^2}\,dr = \frac{GmM}{R}, \text{ отсюда } \upsilon_2 = \sqrt{2gR_C} = \sqrt{2}\upsilon_1 \approx 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ 1 /й}.$$

Третья космическая скорость *– скорость движения, при которой тело может навсегда покинуть пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.*

Чтобы преодолеть силу притяжения Солнца, телу, находящемуся на Земле, надо придать скорость υ_3. Эта скорость определяется аналогично υ_2, т. е. из равенства кинетической энергии тела и его потенциальной энергии в поле Солнца при его удалении в бесконечность:

$$\frac{m\upsilon_3^2}{2} = \gamma\frac{mM_C}{R_1}, \tag{8.5.5}$$

где R_O – радиус земной орбиты; M_C – масса Солнца. Отсюда:

$$\upsilon_3 = \sqrt{\frac{2\gamma M_C}{R_O}} = 42{,}1 \cdot 10^3 \text{ 1 /й}.$$

С учетом того что Земля вращается вокруг своей оси со скоростью 30 км/с, значения третьей космической скорости зависят от направления запуска ракет и изменяются в пределах от 16,6 до 73 км/с. Таким образом, ***при оптимальном запуске*** $\upsilon_3 = 16{,}7 \cdot 10^3$ м/с.

Более подробно расчет третьей космической скорости приведен в задаче 8.2.

Сообщение телам таких больших начальных скоростей является сложной технической задачей. Теоретическую разработку таких задач начал русский ученый К.Э. Циолковский.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения Ньютона.

2. Каков физический смысл, значение и размерность гравитационной постоянной?

3. Что такое напряженность поля тяготения?

4. Какие поля называются однородными, центральными, сферически симметричными?

5. Какие величины вводятся для характеристики поля тяготения и какова связь между ними?

6. Покажите, что силы тяготения консервативны.

7. Чему равно максимальное значение потенциальной энергии системы из двух тел, находящихся в поле тяготения?

8. Как вычисляется работа в поле сил тяготения?

9. Изобразите силовые линии и эквипотенциальные поверхности.

10. Приведите графическую зависимость напряженности гравитационного поля от расстояния до центра Земли.

11. Сформулируйте и поясните принцип эквивалентности Эйнштейна.

12. Сформулируйте законы Кеплера.

13. Какие траектории движения имеют спутники, получившие первую и вторую космические скорости?

14. Как вычисляются первая, вторая и третья космические скорости?

15. Масса самолета в 100 раз больше массы автомобиля, а скорость автомобиля в 20 раз меньше скорости самолета. Больше кинетическая энергия самолета или автомобиля?

16. Что можно сказать о тормозном пути двух одинаковых грузовиков, движущихся с одинаковой скоростью на одном и том же участке дороги, если один грузовик пустой, а другой полностью загружен? Поясните ответ.

17. Как изменяется сила притяжения в зависимости от расстояния до центра Земли? В каких точках Земли сила тяготения равна силе тяжести?

18. В каких точках Земли наблюдается наибольшая разность между силой тяготения и силой тяжести?

19. К каким последствиям привело бы внезапное исчезновение силы тяготения?

20. Самолет движется по дуге радиусом R с постоянной скоростью 500 км/ч. При каком радиусе R пассажиры испытывают состояние невесомости?

Примеры решения задач

Задача 8.1. Простая астрономия Солнечной системы. Физические формулы обладают замечательным свойством. Иногда с их помощью можно сделать то, что невозможно сделать даже при помощи точных измерительных приборов.

Покажем, как можно, используя закон всемирного тяготения, определить: массу Земли, радиус орбиты Луны, скорость Луны на орбите, угловой диаметр Луны, радиус Луны, расстояние от Земли до Солнца, радиус Солнца, массу Солнца и орбитальную скорость Земли.

Решение. Радиус Земли можно найти с помощью геометрических измерений на её поверхности. Современное значение радиуса Земли $R_З = 6,38 \cdot 10^6$ ì .

Найдем массу Земли. Каждое тело массой m притягивается к Земле с силой

$$F = \gamma \frac{mM_З}{R^2},$$

где $M_З$ – масса Земли, а R – расстояние от тела до центра Земли. С другой стороны, отношение силы к массе – это ускорение свободного падения g:

$$g = \gamma \frac{M_З}{R^2}.$$

Из этого уравнения следует, что g не зависит от массы и размеров тела и определяется исключительно параметрами Земли и расстоянием до неё. Вблизи поверхности земли $R \approx R_З$ и $g = 9,81$ м/с^2. Исходя из этого находим массу Земли:

$$Ì_З = \frac{gR_З^2}{\gamma} = \frac{9,81 \cdot \left(6,38 \cdot 10^6\right)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ êã}.$$

Найдем радиус орбиты Луны. Период обращения Луны вокруг Земли равен $Ò_Л = 27,32 \text{ ñóò} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ ñ}$. Центростремительное ускорение Луны $à_Л = \omega_Л^2 R_{ЛЗ} = \left(\frac{2\pi}{Ò_Л}\right)^2 R_{ЛЗ}$ должно быть равно ускорению свободного падения на орбите Луны. Приравняв g и $a_Л$, получим выражение для нахождения радиуса орбиты Луны:

$$R_{ЛЗ} = \sqrt[3]{\frac{GM_З T_Л^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot \left(2,36 \cdot 10^6\right)^2}{4\pi^2}} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ ì}.$$

Найдем скорость Луны на орбите. Скорость находим по формуле

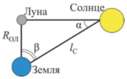
$$\upsilon_{\text{Ë}} = \frac{2\pi R_{\text{Ë}}}{T_{\text{Ë}}} = 1{,}02\cdot 10^{3}\ \text{ì /ñ}.$$

Найдем угловой диметр Луны. Большой палец, толщина которого примерно равна $d \approx 0{,}01$ м, закрывает диск Луны при вытянутой руке $(l = 1\,\text{м})$. Из этого получаем $\varphi \approx \sin\varphi = d/l = 10^{-2}$ рад $\approx 0{,}57^{\circ}$. Более точные измерения дают для углового диаметра $\varphi = 0{,}518^{\circ} = 0{,}009$ рад.

Найдем радиус Луны. Радиус Луны находим, используя точное значение углового диаметра Луны:

$$R_{Л} = L_{Л}\sin(\varphi/2) \approx L_{Л}(\varphi/2) \approx 3{,}84\cdot 10^{8}\cdot 0{,}009/2 = 1{,}73\cdot 10^{6}\ \text{м}.$$

Найдем расстояние от Земли до Солнца. Расстояние найдем с помощью геометрии (см. рис.), используя расстояние от Земли до Луны. Когда луна находится в первой четверти, направления от неё в сторону Земли и в сторону Солнца составляют прямой угол. Угол β между направлениями с Земли на Луну и Солнце близок к прямому (β = 89°51'). Для расчета расстояния от Земли до Солнца используем угол $\alpha = \pi/2 - \beta = 0{,}15^{\circ}$:



$$l_{С} = \frac{R_{\text{ÎË}}}{\sin\alpha} \approx \frac{R_{\text{ÎË}}}{\alpha} = \frac{3{,}84\cdot 10^{8}}{2{,}6\cdot 10^{-3}} \approx 1{,}48\cdot 10^{11}\ \text{ì}.$$

Более точно это расстояние (астрономическая единица) равно $1{,}496\cdot 10^{11}$м = 149,6 млн км.

Найдем скорость Земли на орбите. Период обращения Земли вокруг Солнца равен $T_{З} = 1\,\text{год} = 3{,}156\cdot 10^{7}$ с. Скорость Земли:

$$\upsilon_{\text{Ç}} = \frac{2\pi l_{\text{Ñ}}}{T_{\text{Ç}}} = \frac{2\pi\cdot 1{,}496\cdot 10^{11}}{3{,}156\cdot 10^{7}} = 2{,}98\cdot 10^{4}\ \text{ì /ñ}.$$

Найдем радиус Солнца. Угловой диаметр Солнца приблизительно равен угловому диаметру Луны: $\varphi = 9{,}31\cdot 10^{-3}$рад. Радиус Солнца:

$$R_{\text{Ñ}} = l_{\text{Ñ}}\sin(\varphi/2) \approx \frac{l_{\text{Ñ}}\varphi}{2} = \frac{1{,}496\cdot 10^{11}\cdot 9{,}31\cdot 10^{-3}}{2} = 696\cdot 10^{6}\ \text{ì}.$$

Найдем массу Солнца, используя закон всемирного тяготения. Центростремительное ускорение Земли на орбите $\text{à}_{\text{Ç}} = \dfrac{\upsilon_{С}^{2}}{l_{С}} = \dfrac{4\pi^{2} l_{С}}{T_{\text{Ç}}^{2}}$

должно быть равно ускорению свободного падения Земли на Солнце $g_C = \frac{\gamma M_C}{L_C^2}$. Приравняв $a_З$ и g_C, получим:

$$I_C = \frac{4\pi^2 l_C^3}{\gamma T_C^2} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(1{,}496 \cdot 10^{11}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(3{,}156 \cdot 10^7\right)^2} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{êã}.$$

Задача 8.2. Рассчитать **третью космическую скорость** – скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно навсегда покинуло пределы солнечной системы. Найти оптимальное значение скорости.

Решение. Чтобы преодолеть силу притяжения Солнца, объекту, находящемуся на орбите Земли, надо придать скорость $\upsilon_{кр}$. Эта скорость определяется из равенства кинетической энергии объекта изменению его потенциальной энергии в поле Солнца при удалении на бесконечно большое расстояние (8.5.5):

$$\frac{m\upsilon_{кр}^2}{2} = G\frac{mM_C}{L_C},$$

где M_C – масса Солнца; L_C – радиус земной орбиты. Отсюда

$$\upsilon_{кр} = \sqrt{\frac{2\gamma M_C}{R_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{3}}{1{,}496 \cdot 10^{11}}} = 42{,}1 \cdot 10^3\ м/с.$$

Это минимальная скорость, которую надо придать неподвижному телу, находящемуся на земной орбите. Так как Земля движется вокруг Солнца с линейной скоростью $\upsilon_З$ = 29,8 км/с, то ракету целесообразно запускать в направлении движения Земли вокруг Солнца. Рассчитаем третью космическую скорость *при оптимальном запуске*, исходя из энергетических соображений. Подсчет третьей космической скорости аналогичен вычислению второй космической скорости, но с дополнительным условием – тело на большом расстоянии от Земли все еще должно иметь скорость относительно Земли $\upsilon_{отн}$:

$$\upsilon_{отн} = \upsilon_{кр} - \upsilon_{З},$$

$$\upsilon_{отн} = 42{,}1 \cdot 10^3 - 29{,}8 \cdot 10^3 = 12{,}3 \cdot 10^3\ м/с,$$

тогда

$$\frac{\text{ó}\,\upsilon_1^2}{2} - G\frac{mM_C}{R_C} = \frac{\text{ó}\,\upsilon_{отн}^2}{2}.$$

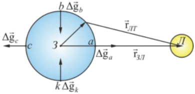
Выразим потенциальную энергию через вторую космическую скорость и отсюда найдем третью космическую скорость:

$$\frac{m\upsilon_3^2}{2} - \frac{m\upsilon_2^2}{2} = \frac{m\upsilon_{\text{отн}}^2}{2}.$$

$$\upsilon_3 = \sqrt{\upsilon_2^2 + \upsilon_{\text{от}}^2}, \ \upsilon_3 = \sqrt{11{,}2^2 + 12{,}3^2} = 16{,}6 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_3 = 16{,}6 \cdot 10^3$ м/с.

Задача* 8.3. ***Оценить вклад Луны в ускорение свободного падения.*** В каждые лунные сутки наблюдаются два прилива и два отлива. В течение примерно шести часов в открытых морях происходит подъем уровня воды, вода надвигается на берег – это прилив. Затем наступает отлив, который длится тоже 6 часов. Причина этого явления в том, что Луна и Солнце вносят вклад в ускорение свободного падения – вектор $\vec{g}$ зависит от взаимного расположения Луны, Солнца и точки наблюдения.



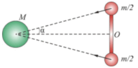
Решение. В точке a, наиболее близкой к Луне, вектор $\Delta\vec{g}_à$ направлен к Луне (см. рис.). Величина ускорения свободного падения $g_à = g_0 - 2Gm_Ë R/r_Ç$. На противоположной стороне земного шара в точке c вектор $\Delta\vec{g}$ направлен от Луны. Поэтому величина ускорения свободного падения $g_c = g_a$: неожиданный результат – и здесь сила притяжения уменьшается. На средней линии в точках b и k величина ускорения свободного падения возрастает:

$$g_b = g_k = g_0 + Gm_Л R/r_З^3.$$

Оценим вклад Луны в ускорение свободного падения. Масса Луны $m_Л = m_З/81{,}3$, среднее расстояние от Земли до Луны $r_Ç = 384\,400$ êì $= 60{,}34R$.

Величина приращения ускорения свободного падения обусловлено влиянием Луны, $\Delta g/g_0 \approx (m_Ë/m_Ç)(R/r_Ë)^3 = 5{,}33 \cdot 10^{-8}$. Ничтожное различие в силе линии в точках b, k уровень понижает. В результате суточного вращения Земли вокруг своей оси двугорбая водяная поверхность перемещается. Это и есть приливы.

Задача* 8.4. ***Гравилет.*** Два шара массами $m_1 = m_2 = m/2$, прикрепленные к концам стержня пренебрежимо малой массы, образуют гантель. Расстояние между центрами шаров – l. Найдем силу, действующую на гантель в поле тяжести Земли. Расстояние от центра Земли до середины гантели – r.



Очевидно сила, действующая на гантель, зависит от ориентации гантели относительно Земли. Пусть ось гантели перпендикулярна плоскости орбиты, по которой движется центр масс (см. рис.). Величины сил, действующих на массы m_1 и m_2, одинаковы и равны:

$$F_1 = F_2 = f, \quad f = \frac{\gamma Mm}{2\left(r^2 + (l/2)^2\right)}.$$

Равнодействующая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ направлена по прямой, проходящей через центр Земли и центр масс гантели, величина силы

$$F(r) = 2f\cos\alpha, \quad F(r) = \frac{GMmr}{[r^2 + (l/2)^2]^{3/2}}. \tag{1}$$

Пусть $l << r$, т. е. гантель является почти материальной точкой массой m. Используя разложение бинома Ньютона $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, $\varepsilon << 1$, получим

$$\frac{1}{[r^2 + (l/2)^2]^{3/2}} = \frac{1}{r^3[1 + (l/2r)^2]^{3/2}} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3l^2}{8r^2} + \ldots\right).$$

Следовательно,
$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{3l^2}{8r^2} + \ldots\right). \tag{2}$$

Второе слагаемое можно рассматривать как силу $\vec{f}$, возмущающую Кеплерово движение тела массой m:

$$\vec{f} = GMm\frac{3l^2 r^2}{8r^4}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор центра масс тела.

Итак, величина силы притяжения, действующей на гантель (1), меньше величины силы притяжения, действующей на точечное тело той же массы. Это обстоятельство позволило предсказать новый эффект – в результате периодического изменения распределения массы внутри космического корабля появляется возможность целенаправленно изменить параметры Кеплерова эллипса.

Пусть длина гантели представляет собой периодическую функцию. В течение каждого периода T:

$$l(t) = l_0, 0 \le t \le T/2; l(t) = 0, T/2 < t < T.$$

В интервале времени, когда выполняется условие $f\upsilon > 0$, длина гантели должна быть равна нулю. В течение остальной части периода, когда $f\upsilon < 0$, длина гантели должна быть максимальной. В результате работы внутренних сил полная энергия гантели E возрастает. Значению $E = 0$ соответствует вторая космическая скорость. Появляется возможность, подобно барону Мюнхаузену, вытащившему себя за волосы из болота, покинуть сферу действия Земли. Этот эффект возможен только в неоднородном поле тяготения.

Задача 8.5. ***Космический лифт.*** Предположим, что на экваторе возведена конструкция, в которой действует лифт. Найдем высоту, на которой скорость груза массой m станет равной местным первой и второй космическим скоростям.

На груз действует сила натяжения каната N, сила тяжести и центробежная сила инерции. Если груз находится на расстоянии r от центра Земли, то $N = mg(R/r)^2 - m\omega^2 r$ или $N = m\omega^2(r_{ст}^3/r^2 - r)$, где ω – угловая скорость вращения Земли, $r_{ст} = \left[gR^2/\omega^2\right]^{1/3}$ – величина, равная радиусу орбиты геостационарного спутника ($r_{ст} = 6{,}7R = 42164$ км). Если $r < r_{ст}$, то для подъема с постоянной скоростью к грузу необходимо приложить силу величиной $N = mg(R/r)^2 - m\omega^2 r$, направленную вертикально верх. Величина скорости груза в инерциальной системе отсчета $\upsilon = \omega r$. На расстоянии $r_{ст}$ от центра Земли $N = 0$: груз приобретает скорость $\upsilon_{ст} = \omega r_{ст}$ равной местной первой космической скорости. Если его не удерживать, то он будет неподвижен относительно лифта. При подъеме груза на расстояние $r = r_1$ центробежная сила становится больше силы притяжения – груз необходимо удерживать. Из закона сохранения полной энергии найдем величину расстояния r_2, на котором груз приобретает местную вторую космическую скорость: $m(\omega r_2)^2/2 - mgR^2/r_2 = 0 + 0$, $r_2 = 2^{1/3} r_{ст}$, $r_2 = 53123$ êì; если его освободить, то он навсегда покинет Землю. Вот еще одна возможность запусков космических аппаратов.

Энтузиастом этой идеи выступает известный писатель-фантаст Артур Кларк. Сейчас он проживает на Цейлоне и уже нашел там место для привязки лифта. Конструкцию для лифта надо строить с крыши. Со стационарного спутника выпускают два троса – вверх и вниз. Затем подбирают их длину так, чтобы вся система вращалась как целое с угловой скоростью ω в процессе увеличения длины тросов. После закрепления нижнего конца за Землю можно заняться устройством лифта. Основная трудность – отсутствие материала необходимой прочности.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.1. Метеорит падает на Солнце с очень большого расстояния, которое можно считать бесконечно большим. Начальная скорость метеорита пренебрежимо мала. Какую скорость будет иметь метеорит в момент, когда его расстояние до Солнца равно среднему расстоянию от Земли до Солнца?

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = 42{,}1$ км/с.

Задача 8.2. Радиус планеты вчетверо больше земного. Определите длительность суток на планете, если тела на ее экваторе невесомы.

Ответ: $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{R_З}{g}} = 48$ ÷.

Задача 8.3. Космическая станция вращается по круговой орбите вокруг земли на высоте $h_1 = 4000$ км, медленно снижаясь. Определите высоту станции h_2 над землей, когда ускорение ее свободного падения увеличится на 20 % по сравнению с первоначальным.

Ответ: $h_2 = \dfrac{R_З + h_1}{\sqrt{1{,}2}} - R_З = 3{,}1 \cdot 10^3$ êì .

Задача 8.4. Какова первая космическая скорость для планеты с массой втрое большей и радиусом вдвое большим, чем у Земли?

Ответ: $\upsilon_1 = \sqrt{1{,}5}\,\upsilon_{1_З} = 9{,}66$ êì /ñ.

Задача 8.5. На экваторе некоторой планеты тело весит в 1,5 раза меньше, чем на полюсе. Определите среднюю плотность вещества планеты, если период ее вращения вокруг оси составляет 20 часов.

Ответ: $\rho = \dfrac{9\pi}{GT^2} = 81$ кг/м^3.

Задача 8.6. На какой высоте должен вращаться спутник в плоскости экватора, чтобы за земные сутки совершать $n = 14$ оборотов вокруг Земли?

Ответ: $h = \sqrt[3]{\dfrac{R_З^2 g}{4\pi^2 n^2}} - R_З = 900$ êì .

Задача* 8.7. Пусть имеется полая сферическая оболочка массой m с внешним радиусом R_2 и внутренним R_1, так что толщина оболочки равна $R_2 - R_1$. Чему равно поле тяготения внутри оболочки, т. е. при $R_1 < r < R_2$? Запишите ответ через G, m, R_1 и R_2, предполагая плотность оболочки однородной.

Ответ: $G\dfrac{m(r^3 - R_1^3)}{r^2(R_2^3 - R_1^3)}$.

Задача 8.8. Телу сообщили на полюсе Земли скорость $\upsilon_0 = 2$ км/с, направленную вертикально вверх. Зная радиус Земли и ускорение свободного падения на ее поверхности, определите высоту, на которую поднимется тело. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $h = \dfrac{R\upsilon_0^2}{2gR - \upsilon_0^2} = 211$ ẽì.

Задача* 8.9. Космическое тело движется в направлении к Солнцу, имея вдали от него скорость $\upsilon_1 = 8{,}3$ км/с и предельный параметр $\rho = 2{,}81$ а.е. Определите наименьшее расстояние r_{min}, на которое это тело приблизится к Солнцу.

Ответ: $r_{min} = \dfrac{GM}{\upsilon_1^2}\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\rho\upsilon_1^2}{GM}\right)^2} - 1\right) = 1{,}074$ à.å.

Задача* 8.10. Космический корабль, запущенный на Марс, движется по эллиптической орбите. Большая ось эллипса равна сумме расстояний от Земли и Марса до Солнца. На рисунке орбита корабля показана штриховой линией. Сколько времени понадобится космическому кораблю, чтобы достичь Марса? Расстояние r_1 между Солнцем и Марсом равно $2{,}28\cdot10^{11}$ м.

Ответ: $t = \left(1+\dfrac{r_1}{r_2}\right)\cdot\sqrt{0{,}5+\dfrac{r_1}{2r_2}}\cdot\dfrac{T_2}{4} = 259{,}7$

Задача 8.11. Определите период обращения искусственного спутника, движущегося в непосредственной близости от поверхности планеты, средняя плотность вещества которой равна ρ.

Ответ: $\sqrt{3\pi/(G\rho)}$.

Задача 8.12. Получите в общем виде выражение для поля тяготения на поверхности планеты радиусом R, средняя плотность вещества которой равна ρ.

Ответ: $(4/3)\pi G\rho R$.

Задача 8.12. Бур поднимают на поверхность Земли из скважины глубиной h. Вычислить относительную погрешность, допускаемую при определении работы по подъему бура без учета изменения его веса.

Ответ: $\Delta A/A = \varepsilon = h/(2R - h)$.

Задача 8.13. По какому закону падало бы тело по трубе, проложенной от Северного к Южному полюсу через центр Земли? За какой промежуток времени оно прошло бы это расстояние при отсутствии сопротивления? Землю считать однородной сферой.

Ответ: $\tau = \pi\sqrt{R / g_0}$.

Задача* 8.14. Каким должен быть радиус однородной сферы плотностью $\rho = 5500$ кг/м^3, чтобы потенциал ее гравитационного поля φ в точке, лежащей на поверхности сферы, был равен 10^8 Дж/кг?

Ответ: $R = \sqrt{3\varphi / 4\pi G\rho} = 8 \cdot 10^6$ м.

Задача* 8.15. Каким должен быть радиус однородной сферы плотностью 5500 кг/м^3, чтобы потенциальная энергия $E_п$ молекулы азота, расположенной у поверхности сферы, в гравитационном поле этой сферы была равной $1{,}6 \cdot 10^{-20}$ Дж?

Ответ: $R = \sqrt{\dfrac{3E_п}{4\pi G\rho m}} = 4{,}7 \cdot 10^5$ м.

Задача 8.16. Найти выражение для напряженности поля и силы гравитационного взаимодействия между тонким однородным кольцом радиусом R и массой M и материальной точкой массой m, лежащей на высоте h на перпендикуляре, восстановленном из центра кольца к его плоскости.

Ответ: $F = G\dfrac{Mmh}{\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}$; $E = \dfrac{GMh}{\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}$.

Задача 8.17. Тонкое однородное полукольцо радиусом R имеет массу M. Найти выражение для силы взаимодействия между этим полукольцом и телом массой m, помещенным в центре кривизны, и для напряженности гравитационного поля полукольца в этой точке.

Ответ: $F = 2G\dfrac{Mm}{\pi R^2}$.

Задача* 8.18. ***Межконтинентальный перелет.*** Телу на поверхности Земли сообщили начальную скорость равную первой космической скорости, направленную под углом α к горизонту. Найдите максимальную высоту подъема над поверхностью Земли и дальность полета.

Ответ: $h_m = R\sin\alpha$; $s = R(\pi - 2\alpha)$.

ГЛАВА 9. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗОВ

В механике с большой точностью жидкости и газы рассматриваются как сплошные среды, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. В данной главе рассматриваются поверхностное натяжение жидкости, капиллярные явления, уравнение неразрывности, уравнение Бернулли, трение и вязкость жидкости.

9.1. Поверхностное натяжение жидкости

Согласно молекулярно-кинетической теории каждая молекула жидкости испытывает притяжение со стороны других молекул. При удалении молекул друг от друга силы притяжения быстро уменьшаются. На расстоянии порядка ~ 10^{-9} м, называемом *радиусом молекулярного действия* r, силами молекулярного притяжения можно пренебречь ввиду их малости.

Рассмотри отдельную молекулу A (рис. 9.1), находящуюся внутри жидкости. Если провести вокруг этой молекулы сферу радиусом r, то силы притяжения со стороны молекул, заключенных в данной сфере, будут направлены в разные стороны и их равнодействующая будет равна нулю.

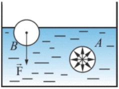


Рис. 9.1. Действие сил на отдельную молекулу, находящуюся: A – внутри жидкости, B – на поверхности

Выделим молекулу B, находящуюся на расстоянии меньше r от поверхности жидкости. Снова проведем сферу радиусом r вокруг молекулы. Как видно из рисунка, часть этой сферы выйдет за пределы жидкости.

В связи с тем что концентрация молекул газа над жидкостью мала, равнодействующая сил молекулярного притяжения $\vec{F}$, действующих на молекулу B, не будет равна нулю. Эта равнодействующая направлена внутрь жидкости. Таким образом, молекулы поверхностного слоя жидкости оказывают на жидкость давление, которое называют молекулярным давлением. Жидкость оказывается сжатой. Поэтому жидкости малосжимаемы при внешнем воздействии.

Молекулы жидкости в поверхностном слое за счет сил межмолекулярного взаимодействия обладают большей потенциальной энергией по сравнению с другими молекулами. Чтобы молекулы из глубины жидкости переместились к её поверхности, необходимо совершить работу против сил, действующих в поверхностном слое. Эта работа совершается за счет уменьшения кинетической энергии теплового движения молекулы и расходуется на увеличение её потенциальной энергии. Итак, в поверхностном слое жидкости обладают дополнительной поверхностной энергией ΔE. Величина энергии ΔE тем больше, чем больше поверхность жидкости.

Для увеличения поверхности жидкости необходимо совершить работу ΔA против сил поверхностного натяжения:

$$\Delta A = \sigma \Delta S,$$

где ΔS – приращение площади приповерхностного слоя жидкости. Тогда

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}.$$

Здесь *поверхностное натяжение* σ равно отношению работы, которую необходимо совершить, чтобы увеличить поверхность жидкости площадью ΔS, к площади этой поверхности.

Если поверхность жидкости ограничена каким-либо замкнутым контуром, то на всё будут действовать силы, стремящиеся сократить эту поверхность. Эти силы *называют силами поверхностного натяжения*.

Поверхностным натяжением σ называется физическая величина, равная отношению силы F, действующей на участок контура поверхности, к длине l этого участка,

$$\sigma = F/l. \qquad (9.1.1)$$

Поверхностное натяжение измеряется в джоулях на квадратный метр (Дж/м^2) или в ньютонах на метр (Н/м).

9.2. Смачивание. Капиллярные явления

Можно наблюдать, как легко капли воды растекаются по поверхности стола, прилипая к нему, а капли ртути свободно перекатываются с одного места на другое, образуя шарик. При этом молекулы ртути преодолевают не только силу тяжести, но и силу притяжения к молекулам стола. Следовательно, сила притяжения молекул ртути друг к другу сильнее, чем к молекулам стола.

В первом случае жидкость *смачивает* поверхность твердого тела, а во втором – *не смачивает*. Без каких-либо внешних воздействий капелька ртути принимает сферическую форму. Стремление поверхности жидкости к сокращению приводит к тому, что давление под выпуклой поверхностью больше, а под вогнутой меньше, чем под плоской. Силы поверхностного натяжения создают *добавочное давление* P (в случае выпуклой поверхности – положительное, а при вогнутой – отрицательное). Вычислим давление P для сферической поверхности.

Пусть радиус сферы r увеличивается на малую величину Δr. При этом поверхность сферы увеличивается на величину $\Delta S = 8\pi r\Delta r$, а объем на величину $\Delta V = 4\pi r^2\Delta r$. Найдем работу ΔA по увеличению объема:

$$\Delta A = P\Delta V = 4\pi r^2 p\Delta r.$$

Для образования новой поверхности, требуется совершить работу:

$$\Delta A_1 = \Delta S{\cdot}\sigma = 8\pi r\sigma\Delta r.$$

Приравнивая ΔA и ΔA_1, найдем величину добавочного давления:

$$P = 2\sigma/r. \qquad (9.2.1)$$

Для поверхности любой формы добавочное давление можно рассчитать по формуле П. Лапласа[34]:

$$\text{Đ} = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (9.2.2)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхности.

Жидкость может смачивать поверхность одного тела и не смачивать поверхность другого. Например, вода смачивает дерево, стекло, но не смачивает парафин. Ртуть смачивает поверхности металлов, но не смачивает поверхности дерева и стекла.

Если опустить в воду тонкие стеклянные трубки разного диаметра (капилляры), то жидкость в них поднимется на разную высоту. Чем тоньше капилляр, тем на большую высоту поднимется жидкость. Если взять жидкость, не смачивающую жидкость, например ртуть, то уровень жидкости в капилляре будет ниже уровня жидкости в сосуде (рис. 9.2). Наблюдаемые явления изменения высоты уровней жидкости в капиллярах получили названия *капиллярных явлений*.

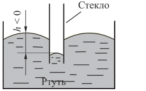


Рис. 9.2. Не смачивающая жидкость

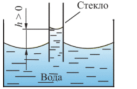


Рис. 9.3. Жидкость, смачивающая трубку

Если жидкость смачивает трубку (рис. 9.3), то поверхность жидкости в трубке (мениск) имеет вогнутую форму, если не смачивает – выпуклую. Под вогнутой поверхностью образуется отрицательное добавочное давление, и жидкость поднимается вверх по капилляру до тех пор, пока это давление не уравновесится высотой столба жидкости в капилляре (гидростатическим давлением).

Найдем высоту подъема жидкости h в капилляре. Пусть жидкость смачивает капилляр радиусом r (рис. 9.3), образуя вверху вогнутый мениск. Наименьший радиус кривизны мениска $=r$. Как следует из уравнения (9.2.1), добавочное давление $P = 2\sigma/r$. Тогда величина направленной вверх силы:

$$F = \frac{2\sigma S}{r},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки.

Эта сила уравнивается силой тяжести столбика жидкости $mg = h\rho g S$, т. е. $F = mg$ или

$$\frac{2\sigma S}{r} = h\rho g S,$$

где ρ – плотность жидкости.

Из этого уравнения находим:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho r g}.$$

Для несмачивающей жидкости мениск выпуклый и добавочное давление дает силу, направленную вниз. Уровень жидкости в капиллярной трубке при этом будет ниже уровня жидкости в сосуде на величину h, определяемую формулой $h = \frac{2\sigma}{\rho r g}$.

9.3. Давление в неподвижных жидкостях и газах

Гидроаэромеханика *– раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами.*

В этом разделе механики используется единый подход к изучению жидкостей и газов, так как во многих механических явлениях их поведение можно описать одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями.

Жидкость, как и газ, принимает форму сосуда, в котором она находится. При этом жидкости и газы рассматриваются как сплошные, непрерывно распределенные в той области пространства, которую они занимают. Газ заполняет весь предоставленный ему объем, т. е. объем газа определяется объемом сосуда, в котором он находится. Объем жидкости не зависит от объема сосуда и остается практически постоянным. Эти и другие отличия жидкостей и газов объясняются характером движения и силами взаимодействия их молекул.

Плотность жидкости мало зависит от давления, плотность газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что в ряде задач сжимаемостью жидкости можно пренебречь без ущерба для точности решения. В этом случае пользуются понятием *несжимаемая жидкость*. Считают, что плотность её везде одинакова и не зависит от времени.

Давление *– физическая величина, равная отношению силы* ΔF, *действующей на элемент поверхности* ΔS *нормально к ней, к площади этого элемента:*

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{9.3.1}$$

Единица измерения давления – паскаль (Па).

Давление внутри жидкости

Определим давление внутри весомой жидкости, считая её несжимаемой, т. е. считая её плотность неизменной с глубиной.

Пусть на жидкость в сосуде действует внешнее давление P_0. Выделим мысленно в жидкости вертикальный цилиндр с поперечным сечением S и высотой h.

На верхний слой жидкости действует внешнее давление P_0, которое также передается и другим слоям жидкости.

Однако к этому давлению в нижележащих слоях добавляется давление, создаваемое весом слоев жидкости, расположенных выше.

На верхнее основание цилиндра действует сила

$$F_0 = P_0 S;$$

на нижнее основание –

$$F = PS,$$

где P – давление на глубине h.

Кроме того, вертикально вниз действует вес столба жидкости, находящейся в объеме цилиндра, равный:

$$F_m = mg = \rho h S g,$$

где ρ – плотность жидкости; hS – её объем в цилиндре. Боковые силы не учитываются, так как они взаимно уравновешены.

Запишем условие равновесия выделенного столба жидкости:

$$F_0 + F_m = F \text{ или } P_0S + \rho ghS = PS.$$

Из этого равенства следует, что искомое давление P на глубине h равно:

$$P = P_0 + \rho gh.$$

Гидростатическое давление:

$$P_г = \rho gh. \quad (9.3.2)$$

Допустим, что внешнее давление $P_0 = 0$. Тогда давление на глубине h равно гидростатическому:

$$P = P_г.$$

Следовательно, гидростатическое давление обусловлено весом слоев жидкости, лежащих над данным слоем.

Если выделить любой горизонтальный тонкий слой жидкости, то он оказывает одинаковое давление, так как для такого слоя можно считать h = const и остальные величины в формуле тоже постоянны.

Давление при равновесии жидкостей и газов подчиняется закону Паскаля[35]: ***давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям и давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.***

При переходе к более глубоким слоям жидкости давление возрастает, т. е. сила давления на нижние слои жидкости больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила – *сила Архимеда*. Эта сила определяется по ***закону Архимеда***: ***на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу вытесненной телом жидкости или газа***:

$$F_А = \rho gV, \quad (9.3.3)$$

где ρ – плотность жидкости или газа; V – объем тела.

9.4. Уравнение неразрывности

Жидкости и газы являются текучими средами: если на частицы жидкости или газа действуют сдвигающие внешние силы, то частицы будут перемещаться до тех пор, пока не исчезнут или не уравновесятся эти силы. Внутренние силы не могут остановить это движение, но могут его замедлять. Тормозящие силы, возникающие между слоями двигающейся жидкости или газа, называются *силами вязкого трения*.

Жидкость, в отличии от газа, считается средой несжимаемой, иногда газ до определенных границ можно рассматривать как несжимаемый.

Рассмотрим течение жидкости по трубе с переменным сечением. Уравнение неразрывности выводится на основании закона сохранения массы и невозможности разрыва жидкости и образования в ней пустот (отсюда происходит название закона).

Рассмотрим жидкость в объеме V между сечениями S_1 и S_2 (рис. 9.4).

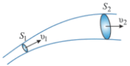


Рис. 9.4. Течение жидкости по трубе. Сечения трубы S_1 и S_2 различны, поэтому и скорость υ_1 и υ_2 в этих сечениях неодинакова

Так как жидкость несжимаемая и в ней не могут образовываться пустоты, то масса жидкости между сечениями S_1 и S_2 не может измениться. За время Δt жидкость пройдет через сечение S_1 и переместится на расстояние

$$l_1 = \upsilon_1 \Delta t.$$

В объем V втечет жидкость, имеющая объем:

$$V_1 = l_1 S_1 = S_1 \upsilon_1 \, \Delta t,$$

масса которой

$$m_1 = \rho V_1 = \rho \, S_1 \upsilon_1 \, \Delta t,$$

где ρ – плотность жидкости; υ_1 – её скорость в сечении S_1.

Аналогично для сечения S_2 получим:

$$V_2 = l_2 S_2 = S_2 \upsilon_2 \, \Delta t,$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho \, S_2 \upsilon_2 \, \Delta t.$$

Так как масса жидкости в объеме V не может измениться, то

$$m_1 = m_2.$$

Исходя из этого получим:

$$l_1 S_1 = l_2 S_2,$$

т. е.

$$V_1 = V_2,$$

$$S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2 = \text{const}. \qquad (9.4.1)$$

Это уравнение называется ***уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости: произведение скорости течения несжимаемой жидкости на её поперечное сечение есть величина постоянная***.

9.5. Уравнение Бернулли и его применение*

Уравнение Д. Бернулли[36] выводится из закона сохранения энергии для *идеальной* (без вязкости) жидкости для стационарных течений. *Стационарным* считается течение, при котором скорость жидкости в каждой точке течения не меняется со временем. Для реальных жидкостей уравнением Бернулли можно пользоваться, если у них низкая вязкость.

Рассмотрим жидкость, движущуюся по трубе между сечениями S_1 и S_2 (рис. 9.4). Так как течение стационарное, то кинетическая энергия жидкости в объеме V между сечениями S_1 и S_2 не изменится. А так как труба неподвижная, то не изменится и потенциальная энергия жидкости в этом объеме. Таким образом, полная механическая энергия рассматриваемого объема жидкости в момент времени t будет равна:

$$E_1 = E_V + m_1gh_1 + m_1\upsilon_1^2/2,$$

в конце промежутка времени Δt:

$$E_2 = E_V + m_2gh_2 + m_2\upsilon_2^2/2,$$

где E_V – энергия жидкости в объеме V. В сечении S_1 жидкость, которая находится слева от этого сечения, совершит работу

$$A_1 = P_1S_1l_1 = P_1V_1,$$

которая пойдет на увеличение энергии жидкости между сечениями S_1 и S_2. В свою очередь, эта жидкость совершит работу в сечении S_2:

$$A_2 = P_2S_2l_2 = P_2V_2,$$

что уменьшит её энергию на эту величину. Здесь P_1 и P_2 – давления жидкости в объемах V_1 и V_2 соответственно. В результате получим:

$$E_2 - E_1 = A_2 - A_1 \text{ или } E_2 + A_2 = E_1 + A_1.$$

Исходя из этого получим:

$$E_V + m_2gh_2 + m_2\upsilon_2^2/2 + P_2V_2 = E_V + m_1gh_1 + m_1\upsilon_1^2/2 + P_1V_1.$$

Учитывая, что $m_1 = m_2$, и поделив это уравнение на $V_1 = V_2$, получим ***уравнение Бернулли***:

$$\rho\upsilon_2^2/2 + \rho gh_2 + P_2 = \rho\upsilon_1^2/2 + \rho gh_1 + P_1. \quad (9.5.1)$$

Оно выполняется для любых точек стационарного течения идеальной жидкости. Т. к. сечения выбирались произвольно, то можно записать:

$$\rho\upsilon^2/2 + \rho gh + P = \text{const}. \quad (9.5.2)$$

В технике величина ρgh называется *гидростатическим напором* (давлением); $\rho\upsilon^2/2$ – *гидродинамическим* (скоростным) напором; P – *статическим давлением*, а их сумма $\rho\upsilon^2/2 + \rho gh + P$ – *полным давлением*.

Частные случаи.

Пусть жидкость покоится, т. е. $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$. Исходя из этого получим:

$$P_2 = P_1 + \rho g(h_1 - h_2),$$
$$P_2 - P_1 = \Delta P,$$

отсюда

$$\Delta p = \rho g(h_1 - h_2) = \rho gh.$$

В покоящейся жидкости изменение статического давления равно гидростатическому напору. Так как в неподвижной жидкости силы вязкости отсутствуют, то это уравнение верно и для реальных жидкостей.

Пусть труба, по которой течет жидкость, горизонтальная, т. е. $h_1 = h_2$. Исходя из этого получим:

$$\rho\upsilon_2^2/2 + P_2 = \rho\upsilon_1^2/2 + P_1.$$

Пусть $\upsilon_2 > \upsilon_1$, тогда $P_2 < P_1$. В горизонтальной трубе давление меньше там, где скорость потока больше (сужение трубы).

Уравнение Бернулли используется для объяснения явлений в различных технических условиях.

Применение уравнения Бернулли

Подъемная сила крыла самолета

Происхождение подъемной силы крыла самолета было объяснено выдающимся русским ученым Н.Е. Жуковским. В деталях теория довольна сложна. Рассмотрим её в упрощенном виде.

Профиль крыла самолета (рис. 9.5) имеет такую форму, что скорость обтекающего потока воздуха относительно крыла внизу меньше, а вверху больше: $\upsilon_2 > \upsilon_1$. Поэтому давление над крылом меньше, чем под крылом: $P_1 > P_2$. Это приводит к избыточной силе $\vec{F}$, которую можно разложить на две составляющие: подъемную силу $\vec{F}_п$ и силу сопротивления $\vec{R}$.

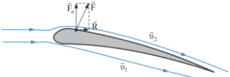


Рис. 9.5. Профиль крыла самолета

Таким же образом объясняется происхождение подъемной силы у кораблей на подводных крыльях.

Измерение скорости течения жидкости и газа

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 9.6. Применив уравнение Бернулли для впаянных в трубу (*1*) тонких вертикальных трубок (*2* и *3*), получим для каждой из них:

$$P_1 = \rho g h_1 \text{ и } P_2 = \rho g h_2.$$

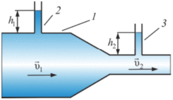


Рис. 9.6. Установка для измерения скорости течения жидкости

В широкой части давление больше, поэтому и высота поднятия жидкости больше.

Используя уравнение Бернулли и эти данные, получим

$$\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho} = 2g(h_1 - h_2).$$

Таким образом, если известна скорость течения в одной точке (допустим υ_1), то, измерив манометром разность давлений или разность высот жидкости в трубах, которые и являются в этом случае манометрами, по этой формуле можно определить скорость течения υ_2.

Подобным образом можно измерять скорость самолета относительно воздуха (рис. 9.7).

За борт самолета выводится тонкая трубка, называемая трубкой Пито[37]. Трубка Пито присоединяется к дифференциальному манометру, измеряющему разность давлений: полного – с помощью внутреннего канала (*1*) и статического – с помощью канала (*2*). Разность этих давлений есть динамический напор $\rho\upsilon^2/2$.

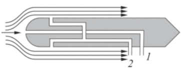


Рис. 9.7. Трубка Пито

Если манометр проградуировать в величинах скорости, учитывая изменение плотности воздуха, то получим прибор для измерения скорости самолета.

9.6. Течение жидкости. Вязкость

Течение реальной жидкости по трубе постоянного сечения сопровождается падением статистического давления. Это явление объясняется наличием у жидкости внутреннего трения (вязкости) и сопровождается переходом части её механической энергии во внутреннюю.

Ламинарное течение – течение жидкости, при котором слои скользят друг относительно друга, не перемешиваясь.

Турбулентное течение – течение, сопровождающееся образованием вихрей и перемешиванием слоев.

Установившееся течение может быть только ламинарным. При ламинарном течении жидкости по трубе скорость слоев непрерывно изменяется от максимальной (по оси трубы) до нуля (у стенок).

Любой слой тормозит движение соседнего слоя, расположенного ближе к оси трубы, и оказывает ускоряющее действие на слой, расположенный дальше от оси. Между соприкасающимися слоями жидкости действуют тангенциальные *силы внутреннего трения*. Модуль этих сил зависит от площади S слоев и градиента скорости $\frac{d\upsilon}{dx}$ (изменение скорости на единицу длины в направлении, перпендикулярном скорости) и определяется ***формулой Ньютона***:

$$F = \eta \frac{d\upsilon}{dx} S,$$

где η – динамическая вязкость, численно равная силе трения, возникающей между параллельно движущимися слоями жидкости единичной площади при единичном градиенте скорости.

Единицы измерения вязкости – паскаль-секунды (1 Па · с = 1 кг/(с · м)).

Коэффициент вязкости различен для разных сред и зависит от температуры. С ростом температуры вязкость жидкости **уменьшается**, а вязкость газов увеличивается.

Вязкость некоторых жидкостей (эмульсии, суспензии, растворы полимеров) зависит от давления, градиента скорости. Это объясняется тем, что структурные элементы жидкости (белковые молекулы, дисперсные частицы) располагаются в потоке по-разному при разной скорости. Такую жидкость называют неньютоновской. Кровь (суспензия клеток крови в белковом растворе – плазме) также относится к неньютоновским жидкостям.

Число Рейнольдса

С увеличением скорости потока ламинарное течение может перейти в турбулентное, а скорость, при которой происходит этот переход, называется ***критической***.

Экспериментально английским ученым О. Рейнольдсом[18] в 1883 г. установлено, что важнейшей характеристикой течения является безразмерная величина, названная ***числом Рейнольдса*** (Re):

$$Re = \frac{\rho \langle \upsilon \rangle l}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости (газа); $\langle u \rangle$ – средняя (по сечению трубы) скорость потока; l – линейный размер, характерный для поперечного сечения трубы; η – динамическая вязкость.

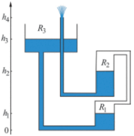
При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается ламинарное течение; при $Re > Re_{кр}$ (критическое значение) ламинарное течение переходит в турбулентное. Для гладких круглых труб $Re_{кр} \approx 2300$.

Контрольные вопросы. Упражнения

1. Назовите примеры повседневных проявлений закона Паскаля.
2. Гидравлический пресс дает выигрыш в силе. Дает ли он выигрыш в работе? Почему?
3. Как устанавливается свободная поверхность однородной по плотности жидкости во всех сообщающихся сосудах? Почему? На основании какого закона?
4. Что можно сказать о давлении в сосудах на какой-то определенной высоте, например h_1? Сравните давления в сосудах на уровнях h_1 и h_2, если $h_2 = 2h_1$.
5. Три сосуда разной формы (площадь дна у сосудов одинакова) заполнены водой до одного и того же уровня. Как объяснить «гидростатический парадокс» (сила «весового» давления на дно не совпадает с весом налитой жидкости)?
6. В каком случае тело тонет? плавает?
7. Ученик Галилея – Эванджелиста Торричелли взял закрытую с одного конца длинную стеклянную трубку ($l = 1$ м), наполнил ртутью и, закрыв отверстие трубки пальцем, перевернул её и погрузил в сосуд с ртутью, после чего убрал палец. Почему ртуть не вытекла полностью?
8. Что такое установившееся (стационарное) течение?
9. Зависит ли скорость в стационарном потоке от площади поперечного сечения?
10. Жидкость течет по горизонтальной трубе. Будет ли гидростатическое давление в первой и третьей четвертях трубы равным?
11. Где статическое давление меньше – в более широких или более узких участках трубы? зависит ли оно от скорости течения жидкости на этих участках?

Примеры решения задач

Задача 9.1. ***Фонтан Герона***[10] (80 г. до н. э.). На рис. изображена конструкция одного из фонтанов. Резервуар R_1, содержащий воздух и слой воды, соединен трубками с открытым резервуаром R_3, заполненным водой, и резервуаром R_2. От резервуара R_2 отходит тонкая трубка, из которой бьет струя фонтана с уровня h_4 = 1,55 м. Уровни воды в резервуарах, соответственно, равны h_1 = 0,25 м, h_2 = 0,95 м, h_3 = 1,35 м. Найти скорость воды на уровне h_4 и длину струи.



Решение. Пусть P – давление в резервуарах R_1 и R_2. Согласно уравнению Бернулли $\rho\upsilon^2/2 + \rho gh$ = const, параметры состояния воды на уровне h_4 основания струи и уровне h_2 поверхности воды в резервуаре R_2 связаны уравнением

$$\rho\upsilon^2/2 + \rho g h_4 + P_{\text{ат}} = \rho g h_2 + P.$$

Рассматривая частицы жидкости на уровне h_3 в открытом резервуаре R_3 и на уровне h_1 в резервуаре R_1, получим еще одно уравнение

$$\rho g h_3 + Đ_{\text{àò}} = \rho g h_1 + Đ.$$

Исключая P, находим

$$\upsilon = (2gh)^{1/2}, h = (h_2 - h_1) - (h_4 - h_3).$$

Длина струи $L = h$, L = 0,5 м, υ = 3,132 м/с.

Задача 9.2. Два друга решили во время ледохода покататься на льдинах. Удержит ли их обоих льдина площадью S = 1,5 м^2 и толщиной h = 50 см? Масса одного мальчика m_1 = 28 кг, масса другого – m_2 = 32 кг. Плотность льда ρ = 0,9 г/см^3, а плотность воды ρ_0 = 1 г/см^3.

Дано:
S = 1,5 м^2
h = 0,5 м
m_1 = 28 кг
m_2 = 32 кг
$\rho = 9\cdot10^2$ кг/м^3
ρ_0 = 1000 кг/м^3
$S_{\min}$ – ?

Решение. Максимальная выталкивающая сила (сила Архимеда) действует на льдину, когда она погрузилась полностью. Для наименьшей площади льдины условие плавания определяется из равенства этой силы и силы тяжести, действующей на систему:

$$S_{\min} h \rho_0 g = S_{\min} h \rho g (m_1 + m_2) g.$$

Из этого уравнения находим:

$$S_{\min} = \frac{m_1 + m_2}{h(\rho_0 + \rho)}, \ [S] = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot(\text{кг}/\text{м}^3)},$$

$$S_{\min} = \frac{28 + 32}{0{,}5(1000 - 900)} = 1{,}2\ \text{м}^2.$$

$S > S_{\min}$, т. е. льдина, которую выбрали друзья, их, к счастью, удержит.

Ответ: $S = 1{,}2$ м^2.

Задача 9.3. Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения. По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определите массовый расход, если разность уровней в манометрических трубках $\Delta h = 8$ см, а сечение трубы у оснований манометрических трубок, соответственно, равны $S_1 = 6$ см^2 и $S_2 = 12$ см^2. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

Дано:
$\Delta h = 8\cdot10^{-2}$ м
$S_1 = 6\cdot10^{-4}$ м^2
$S_2 = 12\cdot10^{-4}$ м^2
$\rho = 10^3$ кг/м^3
Q – ?

Решение. Массовый расход воды – это масса воды, протекающая сквозь сечение за единицу времени:

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho \upsilon_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho \upsilon_2 S_2, \qquad (1)$$

где ρ – плотность воды, υ – скорость течения воды в месте сечения S_2. При стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости выполняется уравнение неразрывности:

$$S_1 \upsilon_1 = S_2 \upsilon_2. \qquad (2)$$

Уравнение Бернулли для горизонтальной трубы ($h_1 = h_2$):

$$p_1 + \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \upsilon_2^2}{2}, \qquad (3)$$

где P_1, P_2 – статическое давление в сечениях манометрических трубок; υ_1, υ_2 – скорость течения воды в местах сечений S_1 и S_2. Учитывая, что

$$P_1 - P_2 = \rho g \Delta h,$$

и решая систему уравнений (2), (3), получаем:

$$\upsilon_2 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

Подставив это выражение в (1), найдем искомый массовый расход воды:

$$Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}} = 0{,}868 \text{ кг/с}.$$

Ответ: $Q = 0{,}868$ кг/с.

Задача 9.4. Определите площадь сечения S_2 открытого цилиндра, стоящего на ножках длиной $h_1 = 1$ м, если через отверстие у его основания диаметром $d_1 = 2{,}5$ см начинает вытекать вода и падает на землю на расстоянии $l = 4{,}5$ м от цилиндра. Высота столба воды в цилиндре $H = 5$ м.

Дано:
$h_1 = 1$ м
$l = 4{,}5$ м
$d_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м
$H = 5$ м
$S_{\text{max}} - ?$

Решение. Пренебрегая силами трения, определим скорость υ_1 вытекания воды из бака. Для этого воспользуемся кинетическим уравнением для горизонтально брошенного тела. Время падения:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ и } \upsilon_1 = \frac{l}{t_1} = l\sqrt{\frac{g}{2h_1}}.$$

Запишем уравнение неразрывности для сечений S_1 и S_2:

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2,$$

где S_1 – площадь отверстия; υ_2 – скорость опускания уровня воды в цилиндре.

Уравнение Бернулли для сечений S_1 и S_2 имеет вид:

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2,$$

где, поскольку бак открыт, давления P_1 и P_2 равны атмосферному давлению; $h_2 = h_1 + H$.

Исходя из этого получим:

$$S_2 = \frac{\upsilon_1 S_1}{\sqrt{\upsilon_1^2 - 2gH}} = \frac{\pi d_1^2 l}{4\sqrt{l^2 - 4h_1 H}},\ [S_2] = \left[\frac{\text{м} \cdot \text{м}^2}{\sqrt{\text{м}^2}}\right] = \text{м}^2,$$

$$S_2 = \frac{3{,}14 \cdot 2{,}5^2 \cdot 10^{-4} \cdot 4{,}5}{4\sqrt{4{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}} = 44{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Ответ: $S_2 = 44{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^2.

Задача 9.5. В дне цилиндрического сосуда диаметром $D = 50$ см имеется малое круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. Найдите зависимость скорости υ_1 понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Рассчитайте числовое значение этой скорости для $h = 20$ см.

Дано:
$D = 0{,}5$ м
$d = 0{,}01$ м
$h = 0{,}2$ м
$\upsilon = f(h) - ?$

Решение. Обозначим: S_1 и S_2 – площадь поперечных сечений сосуда и отверстия, υ_2 – скорость вытекания воды из отверстия.

Согласно уравнению Бернулли

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2},\ \text{или}\ \upsilon_1^2 + 2gh = \upsilon_2^2.$$

В силу уравнения неразрывности

$$S_1\upsilon_1 = S_1\upsilon_2,\ \text{или}\ \upsilon_2 = \frac{S_1\upsilon_1}{S_2}.$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$\upsilon_1^2 + 2gh = \frac{S_1^2 \upsilon_1^2}{S_2^2}, \; 2ghS_2^2 = \left(S_1^2 - S_2^2\right)\upsilon_1,$$

отсюда

$$\upsilon_1 = \frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}.$$

Так как $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ и $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$,

то

$$\upsilon_1 = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}.$$

Поскольку $d^4 << D^4$, искомая зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты этого уровня

$$\upsilon_1 = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}.$$

При $h = 0{,}2$ м числовое значение $\upsilon_1 = 7{,}92 \cdot 10^{-4}$ м/с.

Ответ: $\upsilon_1 = 7{,}92 \cdot 10^{-4}$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.1. Шар равномерно падает в жидкости, плотность которой в 2,5 раза меньше плотности шара, испытывая силу сопротивления со стороны жидкости, равную 1,2 Н. Какова масса шара?

Ответ: $m = \frac{F_c}{g(1 - \rho_ж / \rho_т)} = 0{,}2$ кг.

Задача 9.2. Металлический брусок плавает в сосуде, в который налита ртуть и вода. При этом брусок погружен в ртуть на 1/4 и в воду на 1/2 своей высоты. Какова плотность металла бруска?

Ответ: $\rho = \frac{\rho_1}{4} + \frac{\rho_2}{2} = 3{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Задача 9.3. Аэростат, наполненный водородом, поднимается с ускорением 1 м/с^2. Масса оболочки аэростата с грузом 700 кг. Плотность воздуха 1,29 кг/см^3. Определите объем аэростата.

Ответ: $V = \frac{m_1(g + a)}{\rho_{возд} g - \rho_{вод}(g + a)} = 647$ м^3.

Задача 9.4. Определите натяжение нити, связывающей два шарика объёмом 10 см^3 каждый, если верхний шарик плавает, наполовину погрузившись в воду. Масса нижнего шарика в три раза больше массы верхнего шарика. Плотность воды 10^3 кг/м^3, $g = 10$ м/с^2.

Ответ: $T = \dfrac{\rho g V}{8} = \dfrac{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-5}}{8} = 12{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н.

Задача 9.5. Тонкая палочка шарнирно закреплена одним концом и опущена свободным концом в воду. Определите плотность палочки, если равновесие достигается, когда в воду погружена половина палочки. Плотность воды 1000 кг/м^3.

Ответ: $\rho_п = \dfrac{3}{4}\rho_в = 750\ кг/м^3$.

Задача 9.6. Резиновый мяч массой 200 г и объемом 220 см^3 погружают под воду на глубину 3 м и отпускают. На какую высоту (в метрах), считая от поверхности воды, подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха при движении мяча не учитывать. Плотность воды 10^3 кг/м^3.

Ответ: $H = h\left(\dfrac{\rho_в V}{m} - 1\right) = 0{,}3$ м.

Задача 9.7. Вода течет по круглой гладкой трубке диаметром $d = 5$ см со средней по сечению скоростью $<\upsilon> = 10$ см/с. Определите число Рейнольдса Re для потока жидкости в трубе и укажите характер течения жидкости.

Ответ: $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho < \upsilon > d}{\eta} = 5000$ (η – динамическая вязкость);

движение турбулентное, т. к. полученное число Рейнольдса $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$ ($\mathrm{Re}_{кр} = 2300$).

Задача 9.8. Медный шарик диаметром $d = 1$ см падает с постоянной скоростью в касторовом масле. Является ли движение масла, вызванное падением шарика, ламинарным? Критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$.

Ответ: $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho_2(\rho_1 - \rho_2)gd^3}{18\eta^2} = 4{,}17$ (ρ_1 и ρ_2 – плотность меди и масла; η – динамическая вязкость масла);

т. к. полученное число Рейнольдса $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$, движение турбулентное.

Задача 9.9. Латунный шарик диаметром $d = 0{,}5$ мм падает в глицерине. Определить: 1) скорость υ установившегося движения шарика; 2) является ли при этой скорости обтекание шарика ламинарным?

Ответ: 1) $\upsilon = \dfrac{(\rho_1 - \rho_2) g d^2}{18\eta} = 6{,}71$ ì ì /ñ

(ρ_1 и ρ_2 – плотность латуни и глицерина;
η – динамическая вязкость глицерина);
2) обтекание шарика ламинарное.

Задача 9.10. При движении шарика радиусом $r_1 = 2{,}4$ мм в касторовом масле ламинарное обтекание наблюдается при скорсоти υ_2. При какой скорости шарика радиусом $r_2 = 1$ мм в глицерине обтекание станет турбулентным?

Ответ: $\upsilon_2 = \dfrac{\rho_1 r_1 \eta_2}{\rho_2 r_2 \eta_1}\upsilon_1 = 27{,}7$ ñì /ñ (ρ_1 и η_1 – плотность и динамическая вязкость касторового масла;
ρ_2 и η_2 – то же для для глицерина).

Задача 9.11. В трубе с внутренним диаметром $d = 3$ см течет вода. Определить максимальный массовый расход $Q_{m,\,max}$ воды при ламинарном течении.

Ответ: $Q_{m,\,max} = (1/4)\pi\eta\,\mathrm{Re}_{кр}\,d = 54{,}2$ г/с
(η – динамическая вязкость масла).

Задача 9.12. В горизонтально расположенной трубе с площадью S_1 поперечного сесения, равной 20 см^2, течет жидкость. В одном месте труба имеет сужение, в котором площадь S_2 сечения равна 12 см^2. Разность Δh уровней в двух манометрических трубках, установленных в широкой и узкой частях трубы, равна 8 см. Определить объемный расход Q_V жидкости.

Ответ: $Q_V = S_1\upsilon_1 = S_1 S_2 \sqrt{\dfrac{2g\Delta h}{S_1^2 - S_2^2}} = 1{,}88$ ë/ñ.

Задача 9.13. Масляный гидравлический пресс имеет площадь левого поршня $S_1 = 20$ ñì ^{2}, правого $- 100$ см^2. На какую высоту опустится левый поршень, если на него поставить гирю массой $m = 1{,}5$ кг? Плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3.

Ответ: $\Delta h = \dfrac{m}{S_1\rho\left(1 + \dfrac{S_1}{S_2}\right)} = 69$ ñì .

Задача 9.14. Сплошной металлический шарик радиусом $r = 20$ см был взвешен в воде, затем в некоторой жидкости. Разность показаний весов составила $\Delta P = 65{,}7$ Н. Определите плотность жидкости, если плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

Ответ: $\rho = \rho_0 - \dfrac{3P}{4\pi r^3 g} = 0{,}8$ г/см^3.

Задача 9.15. Серебряная ложка в воде весит $P = 2$ Н. Определите ее объем V, если плотность серебра $\rho = 10{,}5$ г/см^3. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

Ответ : $V = \dfrac{P}{g(\rho - \rho_0)} = 21{,}5$ ñì^3.

Задача 9.16. Льдину толщиной $H = 1{,}5$ м вынесло из реки в океан. Насколько поднялась льдина над поверхностью воды по сравнению с первоначальным уровнем? Плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3, плотность пресной воды $\rho = 1$ г/см^3, плотность соленой воды $\rho_c = 1{,}03$ г/см^3.

Ответ: $\Delta h = H \dfrac{\rho_л(\rho_с - \rho_{п})}{\rho_{п}\rho_{с}} = 2{,}62$ ñì.

Задача 9.17. Алюминиевый шар массой $m = 200$ г плавает, полностью погрузившись в воду. Определите объем ΔV полости внутри шара. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3, плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

Ответ: $\Delta V = m \dfrac{\rho - \rho_0}{\rho \rho_0} = 126$ см.

Задача 9.18. Определите количество воды, проникающей внутрь корабля за время $t = 20$ мин в пробоину диаметром $d = 5$ см, которая находится на глубине $H = 4$ м от поверхности воды. Давление в трюме равно атмосферному.

Ответ: $V = \dfrac{\pi d^2}{4} t \sqrt{2gH} = 10{,}4$ м^3

С тех пор как за теорию относительности принялись математики,
я ее уже сам больше не понимаю.
Шутка А. Эйнштейна

ГЛАВА 10. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Г. Галилей установил, что во всех инерциальных системах отсчета законы классической динамики имеют одинаковую форму: в этом заключается суть механического принципа относительности. Противоречия между этим принципом и уравнениями электродинамики привело к отказу от преобразований Галилея и созданию специальной теории относительности (СТО), являющейся предметом этой главы.

10.1. Принцип относительности Галилея. Закон сложения скоростей

При изложении механики предполагалось, что все скорости движения тел значительно меньше скорости света. Причина этого в том, что механика Ньютона (называемая также классической) неверна при скоростях движения тел, близких к скорости света ($\upsilon \to c$). Правильная теория для этого случая называется релятивистской механикой (от англ. *relativity* – относительность) или *специальной теорией относительности*. Механика Ньютона оказалась замечательным приближением к релятивистской механике, справедливым в области $\upsilon << c$.

Большинство встречающихся в повседневной жизни скоростей значительно меньше скорости света. Но существуют явления, где это не так (ядерная физика, электромагнетизм, фотоэффект, астрономия и т. д.).

Согласно представлениям классической механики, *механические явления происходят одинаково в двух системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно друг друга.*

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета k и k'. Система k' движется относительно k со скоростью υ = const вдоль оси x. Точка M движется в двух системах отсчета (рис. 10.1).

Найдем связь между координатами точки M в обеих системах отсчета. Отсчет начнем, когда начала координат систем совпадают, то есть $t = t'$. Тогда:

$$\begin{cases} x = x' + \upsilon t, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \qquad (10.1.1)$$

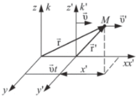


Рис. 10.1. Инерциальная система отсчета k′ движется относительно k со скоростью υ

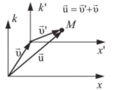


Рис. 10.2. К закону сложения скоростей в классической механике

Совокупность уравнений (10.1.1) называется ***преобразованиями Галилея.***

В уравнениях (10.1.1) время $t = t'$, т. е. в классической механике предполагалось, что время течет одинаково в обеих системах отсчета независимо от скорости. («*Существует абсолютное время, которое течет всегда одинаково и равномерно*», – говорил Ньютон).

В векторной форме преобразования Галилея можно записать так:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\upsilon}t. \qquad (10.1.2)$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\upsilon}.$$

Отсюда получим ***закон сложения скоростей*** в классической механике (рис. 10.2):

$$\vec{u} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}. \qquad (10.1.3)$$

Из (10.1.3) следует, что скорость движения точки *M* (сигнала) $\vec{\upsilon}'$ в системе *k′* и $\vec{u}$ в системе *k* различна.

Законы природы, определяющие изменение состояния движения механических систем, не зависят от того, к какой из двух инерциальных систем отсчета они относятся. Это и есть ***принцип относительности*** Галилея.

Из преобразований Галилея и принципа относительности следует, что *взаимодействия в классической физике должны передаваться с бесконечно большой скоростью* $c \to \infty$ (теория *дальнодействия*), т. к. в противном случае можно было бы одну инерциальную систему отсчета отличить от другой по характеру протекания в них физических процессов.

Принцип относительности Галилея и законы Ньютона подтверждались ежечасно при рассмотрении любого движения, и господствовали в физике более 200 лет.

Но вот в 1865 г. появилась теория Дж. Максвелла, и уравнения Максвелла не подчинялись преобразованиям Галилея. Ее мало кто принял сразу, она не получила признания при жизни Максвелла. Но вскоре все сильно изменилось, когда в 1887 г., после открытия электромагнитных волн Герцем[40], были подтверждены все следствия, вытекающие из теории Максвелла, ее признали. Появилось множество работ, развивающих теорию Максвелла.

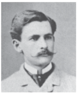
Дело в том, что в теории Максвелла скорость света (скорость распространения электромагнитных волн) конечна и равна $c = 3 \cdot 10^8\,\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$. Исходя же из принципа относительности Галилея, скорость передачи сигнала $\vec{\upsilon}$ бесконечна и зависит от системы отсчета (10.1.3).

Первые догадки о конечности распространения скорости света были высказаны еще Галилеем. Астроном Рёмер[41] в 1676 г. пытался найти скорость света. По его приближенным расчетам она была равна $c = 214300000\ \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Нужна была экспериментальная проверка теории Максвелла. Он сам предложил идею опыта – использовать Землю в качестве движущейся системы. (Известно, что скорость движения Земли сравнительно высокая: $\upsilon_З \approx 30\,\text{км/с} \approx 3 \cdot 10^4\ \text{м/с}$).

В 80-х годах XIX века были выполнены опыты, которые доказали независимость скорости света от скорости источника или наблюдателя.

Необходимый для опыта прибор изобрел блестящий военно-морской офицер США А. Майкельсон.



Майкельсон Альберт Абрахам (1852–1931) – американский физик. Основные работы в области оптики и спектроскопии. Изобрел прибор, названный «интерферометром Майкельсона», сыгравший значительную роль в обосновании специальной теории относительности и в изучении спектральных линий. Осуществил серию экспериментов по точному определению скорости света. Доказал при помощи оптического метода вращение Земли вокруг оси и определил скорость вращения. Лауреат Нобелевской премии в 1907 г.

Прибор состоял из интерферометра с двумя «плечами», расположенными перпендикулярно друг к другу (рис. 10.3). Вследствие сравнительно большой скорости движения Земли, свет должен был иметь различные скорости по вертикальному и горизонтальному направлениям. Поэтому *время*, затрачиваемое на прохождение вертикального пути *источник S – полупрозрачное зеркало* (ппз) – *зеркало* (з1) – (ппз) и горизонтального пути *источник* – (ппз) – *зеркало* (з2) – (ппз), *должно быть различным*. В результате, световые волны, пройдя указанные пути, должны были изменить интерференционную картину на экране.

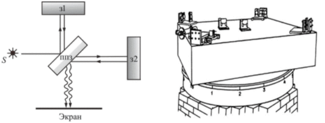


Рис. 10.3. Схема и внешний вид интерферометра Майкельсона.
S – источник света; ппз – полупрозрачное зеркало; з1 и з2– отражающие зеркала

Майкельсон проводил эксперименты в течение семи лет с 1881 г. в Берлине и с 1887 г. в США совместно с профессором Морли[42]. Точность первых опытов была невелика ± 5 км/с. Однако, опыт дал *отрицательный результат*: сдвиг интерференционной картины обнаружить не удалось. Таким образом, результаты опытов Майкельсона – Морли показали, что величина скорости света постоянна и не зависит от движения источника и наблюдателя. Эти опыты повторяли и перепроверяли многократно. В конце 60-х годов Ч. Таунс[43] довел точность измерения до ±1 м/с. Скорость света осталась неизменной $c = 299792458$ м$\cdot$с$^{-1}$.

Независимость скорости света от движения источника и от направления недавно была продемонстрирована с рекордной точностью в экспериментах, выполненных исследователями из университетов г. Констанц и г. Дюссельдорф (современная версия эксперимента Майкельсона–Морли), в которых установлена лучшая на сегодняшний день точность $1{,}7 \cdot 10^{-15}$. Исследовалась стоячая электромагнитная волна в полости кристалла сапфира, охлажденного жидким гелием. Два таких резонатора были ориентированы под прямым углом друг к другу. Вся установка могла вращаться, что позволило установить независимость скорости света от направления.

Было много попыток объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона – Морли. Наиболее известна гипотеза Лоренца[44] о сокращении размеров тел в направлении движения. Он даже вычислил эти сокращения, использовав для этого преобразование координат, которые так и называются «сокращения Лоренца–Фитцджеральда[45]».

Дж. Лармор[46] в 1889 г. доказал, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца. Очень близок был к созданию теории относительности Анри Пуанкаре[47]. Но Альберт Эйнштейн был первым, кто четко и ясно сформулировал основные идеи теории относительности.

10.2. Принцип относительности Эйнштейна

В 1905 г. в журнале «*Анналы физики*» вышла знаменитая статья А. Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», в которой была изложена специальная теория относительности (СТО). Затем было много статей и книг, поясняющих, разъясняющих, интерпретирующих эту теорию.

Принцип относительности Эйнштейна представляет собой фундаментальный физический закон, согласно которому любой процесс протекает одинаково в изолированной материальной системе, находящейся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Иначе говоря, законы физики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

В основе СТО лежат ***два постулата***, *выдвинутых* Эйнштейном.

1. ***Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета***.

Уравнения, выражающие законы природы, *инвариантны* по отношению к любым инерциальным системам отсчета.

Инвариантность – неизменность вида уравнения при переходе из одной системы отсчета в другую (при замене координат и времени одной системы – другими).

2. ***Скорость света в пустоте одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости источника и приемника света.***

Все как-то пытались объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона–Морли, а Эйнштейн – постулировал это, как закон.

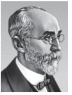
В первом постулате главное то, что время тоже относительно – такой же параметр, как и скорость, импульс и др.

Второй – возводит отрицательный результат опыта Майкельсона–Морли в ранг закона природы: $c = \text{const}$.

Специальная теория относительности представляет физическую теорию, изучающую пространственно-временные закономерности, справедливые для любых физических процессов, когда можно пренебречь действием тяготения. СТО, опираясь на более совершенные данные, раскрывает новый взгляд на свойства пространства и времени. Эти свойства необходимо учитывать при скоростях движения, близких к скорости света.

10.3. Преобразования Лоренца

Формулы преобразования при переходе из одной инерциальной системы в другую, с учетом постулатов Эйнштейна, предложил Лоренц в 1904 г.



Лоренц Хендрик Антон (1853–1928) – нидерландский физик-теоретик, создатель классической электронной теории на основе электромагнитной теории Максвелла–Герца. Его работы посвящены термодинамике, электродинамике, статической динамике, оптике, теории излучения, атомной физике. На основе электронной теории он объяснил целый ряд физических факторов и явлений и предсказал новые. Разработал электродинамику движущихся тел (преобразования Лоренца). Член многих академий наук, в том числе и АН СССР, лауреат Нобелевской премии.

Так же как и в п. 8.1, рассмотрим две инерциальные системы отсчета (неподвижную и подвижную) k и k' (рис.8.1). Пусть x, y, z, t – координаты и время некоторого события в системе k, а x', y', z', t' – координаты и время того же события в k'. Как связаны между собой эти координаты и время?

В рамках классической теории при $\upsilon << c$ эта связь устанавливается преобразованиями Галилея, в основе которых лежат представления об абсолютном пространстве и независимом времени:

$$x = x' + \upsilon t;\;\; y = y';\;\; z = z';\;\; t = t'. \qquad (10.3.1)$$

Из этих преобразований следует, что взаимодействия, в том числе и электромагнитные, должны передаваться с бесконечно большой скоростью $c \to \infty$, и скорость движения сигнала в системе k отличается от скорости в системе k': $\vec{u} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}$ (рис. 8.2).

Лоренц установил связь между координатами и временем события в системах отсчета k и $k,'$ основываясь на тех экспериментальных фактах, что:

- *все инерциальные системы отсчета физически эквивалентны;*
- *скорость света в вакууме постоянна и конечна во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости движения источника и наблюдателя.*

Таким образом, при больших скоростях движения, сравнимых со скоростью света, Лоренц получил ($\beta = \upsilon/c$):

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}},\;\; x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (10.3.2)$$

$$y = y',\;\; y' = y,\;\; z = z';\;\; z' = z,$$

$$t = \frac{t' + \frac{\upsilon x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},\;\; t' = \frac{t - \frac{\upsilon x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Это и есть знаменитые ***преобразования Лоренца***.

Истинный физический смысл этих формул был впервые установлен Эйнштейном в 1905 г. в СТО. В теории относительности *время* иногда *называют четвертым измерением*. Точнее говоря, *величина* ct, имеющая ту же размерность, что и x, y, z, *ведет себя как четвертая пространственная координата*. В теории относительности ct и x проявляют себя с математической точки зрения сходным образом.

Полученные уравнения связывают координаты и время в подвижной k' и неподвижной k системах отсчета. Отличие состоит только в знаке скорости υ, что и следовало ожидать, поскольку система k' движется относительно k слева направо со скоростью υ, но наблюдатель в системе k' видит систему k, движущуюся относительно него справа налево со скоростью минус υ.

Как видно из преобразований Лоренца, скорость υ относительного движения систем отсчета может быть только меньше скорости света c, т. к. в противном случае коэффициент $1/\sqrt{1-\beta^2}$ становится мнимым (если $\upsilon > c$) или обращается в бесконечность (если $\upsilon = c$) и преобразования Лоренца теряют смысл. В случае, когда $\upsilon << c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (***принцип соответствия***). Чтобы в этом убедиться, достаточно в формулах преобразований совершить предельный переход при $c \to \infty$.

Зная формулу преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, можно более строго сформулировать ***обобщенный принцип относительности***: *уравнения, выражающие законы природы, должны быть инвариантны относительно преобразования Лоренца, т. е. их вид не должен изменяться при этих преобразованиях.*

10.4. Следствия из преобразований Лоренца

Непосредственное ***следствие преобразований Лоренца***: *не может быть объектов, движущихся быстрее света.* ***Скорость света играет роль предельно возможной скорости распространения сигнала.***

1. Инвариантность интервала

Величина интервала является инвариантом относительно преобразований Лоренца.

Пусть даны два события: одно произошло в момент времени t_1 в точке с координатами x_1, y_1, z_1, а второе – в момент времени t_2 в точке с координатами x_2, y_2, z_2. ***Интервалом*** *между событиями называется величина*

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}. \qquad (10.4.1)$$

Подставив над координатами и временами штрихи, мы получим величину интервала s'_{12} между этими же событиями в другой системе отсчета. Из преобразований Лоренца находим:

$$c^2(t_2-t_1)^2=\frac{c^2(t'_2-t'_1)^2+2V(t'_2-t'_1)(x'_2-x'_1)+V^2/c^2\,(x'_2-x'_1)^2}{1-\upsilon^2/c^2},$$

$$(x_2-x_1)^2=\frac{(x'_2-x'_1)^2+2V(t'_2-t'_1)(x'_2-x'_1)+V^2(t'_2-t'_1)}{1-\upsilon^2/c^2},$$

$(y_2-y_1)^2=(y'_2-y'_1)^2$, $(z_2-z_1)^2=(z'_2-z'_1)^2$, откуда следует:

$$s_{12}=\sqrt{c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2}.$$

Таким образом, величина интервала является инвариантом относительно преобразований Лоренца.

В классической механике таким свойством обладали по отдельности временной интервал t_{12} = t_2 – t_1 и пространственное расстояние $l_{12}=\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$. В релятивистской физике этим свойством обладает только интервал $s_{12}=\sqrt{c^2t_{12}^2-l_{12}^2}$.

2. Одновременность событий в СТО

По Ньютону, если два события происходят одновременно, то это будет одновременно для любой системы отсчета (время абсолютно). Эйнштейн задумался, как доказать одновременность?

Возьмем два источника света на Земле *A* и *B* (рис. 10.4).

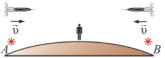


Рис. 10.4. В неподвижной системе k (на Земле) в точках A и B одновременно произошли два события в момент времени $t_1 = t_2 = t$. В движущейся системе k′ (в ракете) эти события не одновременны $t'_1 \neq t'_2$

Если свет встретится на середине *AB*, то вспышки для человека, находящегося на Земле, будут одновременны. Но со стороны пролетающих мимо космонавтов со скоростью υ вспышки не будут казаться одновременными, т. к. $c = \text{const}$. Рассмотрим это более подробно.

Пусть в системе *k* (на Земле) в точках x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1=t_2=t$. Будут ли эти события одновременны в *k′* (в пролетающей мимо ракете)?

Для определения координат в k' воспользуемся преобразованиями Лоренца:

$$x'_1 = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}},\; x'_2 = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (10.4.2)$$

В соответствии с преобразованиями Лоренца для времени в системе k' получим:

$$t'_1 = \frac{t - \frac{\upsilon x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},\; t'_2 = \frac{t - \frac{\upsilon x_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (10.4.3)$$

Если события в системе k происходят одновременно в одном и том же месте, $x_1 = x_2$, то и $x'_1 = x'_2$, т. е. и для k' эти события тоже одновременны.

Таким образом, события будут абсолютно ***одновременны*** в системах k и k', если они происходят в один и тот же момент времени $t'_2 = t'_1$ в одном и том же месте $x'_2 = x'_1$.

Если же в системе k, $x_1 \neq x_2$, то из (8.4.2) видно, что и в k' $x'_1 \neq x'_2$, тогда из (8.4.3) следует, что *события в системе k' не одновременны*, т. е. $t'_1 \neq t'_2$.

Интервал времени между событиями в системе k':

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\upsilon(x_1 - x_2)}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (10.4.4)$$

Разница во времени будет зависеть от υ, и она может отличаться по знаку (ракета подлетает с той или другой стороны).

3. Лоренцево сокращение длины (длина тел в разных системах отсчета)

Рассмотрим рис. 10.5, на котором изображены две системы координат k и k'.

Пусть $l_0 = x'_2 - x'_1$ – *собственная длина тела* в системе, относительно которой тело неподвижно (например: в ракете, движущейся со скоростью $\upsilon \approx c$ мимо неподвижной системы отсчета k (Земля)). Измерение координат x_1 и x_2 производим одновременно в системе k, т. е. $t_1 = t_2 = t$.

Используя преобразования Лоренца, для координат получим:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - \upsilon t_2) - (x_1 - \upsilon t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т. е.

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ или } l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (10.4.5)$$

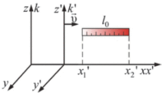


Рис. 10.5. *Собственная длина линейки l_0 в движущейся системе k'*

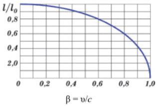


Рис 10.6. *Зависимость длины тела от скорости*

Формула (10.4.5) называется *лоренцевым сокращением длины*. Собственная длина тела есть максимальная длина. Длина движущегося тела короче, чем покоящегося (рис. 10.6). Причем сокращается только проекция на ось x, т. е. *размер тела вдоль направления движения*.

4. Замедление времени (длительность событий в разных системах отсчета)

Пусть вспышка лампы на ракете длится $\Delta t_0 = \tau = t'_2 - t'_1$, где τ – *собственное время*, измеренное наблюдателем, движущимся вместе с часами. Чему равна длительность вспышки $(t_2 - t_1)$ с точки зрения человека, находящегося на Земле, мимо которого пролетает ракета?

Так как $x'_1 = x'_2$, тогда из преобразований Лоренца:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ или } \Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (10.4.6)$$

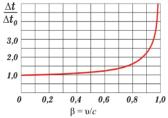


Рис. 10.7. *Замедление времени в движущейся системе k'*

Из этого уравнения следует, что *собственное время – минимально* (*движущиеся часы идут медленнее покоящихся*) (рис. 10.7). Таким образом, вспышка на Земле будет казаться длиннее.

Этот вывод имеет множество экспериментальных подтверждений.

Так, нестабильные элементарные частицы – пионы, рождающиеся в верхних слоях атмосферы, на высоте 20…30 км, при воздействии на нее космических лучей имеют собственное время жизни $\tau \approx 2 \cdot 10^{-6}$ с. За это время они могут пройти короткий путь $S = c \cdot \tau = 600$ м. Но в результате того, что они движутся с очень большими скоростями, сравнимыми со скоростью света, их время жизни увеличивается и они до своего распада способны достигать поверхности Земли. Отсюда следует вывод, что у движущихся пионов секунды «длиннее» земных секунд.

В 70-е годы замедление времени наблюдалось не только с помощью нестабильных микрочастиц, но и проводились прямые измерения с использованием высокоточных часов, основанных на эффекте Мессбауэра[48]. Двое таких часов показывают одно и то же время с точностью до 10^{-16} с.

В 1971 г. Хафель[49] и Китинг[50] осуществили прямое измерение замедления времени, отправив два экземпляра атомных часов в кругосветное путешествие на реактивном самолете. Потом их показания сравнили с показаниями таких же часов, оставленных на Земле, в лаборатории ВМС США. Время запаздывания составило $273 \cdot 10^{-9}$ с, что в пределах ошибок согласуется с теорией.

Это следствие из преобразований Лоренца объясняет известный всем *парадокс близнецов*.

Мы убедились, что наряду с относительностью временных интервалов и пространственных расстояний даже одновременность событий не имеет абсолютного значения. Все они *относительны*, т. е. зависят от движения наблюдателя. В классической физике относительными были, например, скорости тел, их кинетические энергии. Теперь список подобных величин пополнился.

10.5. Сложение скоростей в релятивистской механике

Мы говорили, что *скорость света – максимально возможная скорость распространения сигнала*. Но что будет, если свет испускается движущимся источником в направлении его скорости υ (рис. 8.1)? Согласно закону сложения скоростей, следующему из преобразований Галилея, скорость света должна быть равна $c + \upsilon$. Но в теории относительности это невозможно. Получим закон сложения скоростей из преобразований Лоренца. Для этого запишем их для бесконечно малых величин:

$$dx = \frac{dx' + \upsilon dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \; dy = dy', \; dz = dz', \; dt = \frac{dt' + \dfrac{\upsilon dx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

По определению скорости ее компоненты в системе отсчета k находятся как отношения соответствующих перемещений к временным интервалам: $\upsilon_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ и т. д. Аналогично определяется скорость объекта в движущейся системе отсчета k', только пространственные расстояния и временные интервалы надо взять относительно этой системы: $\upsilon'_x = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$ и т. д. Следовательно, разделив выражение $\mathrm{d}x$ на выражение $\mathrm{d}t$, получим:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + \upsilon \mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + \dfrac{\upsilon \mathrm{d}x'}{c^2}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\mathrm{d}t'$, находим связь x-компонент скоростей в разных системах отсчета, которая отличается от правила сложения скоростей по Галилею:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + \upsilon}{1 + \upsilon'_x \, \upsilon / c^2}. \qquad (10.5.1)$$

Эта формула выражает ***правило сложения скоростей*** *в релятивистской механике.*

Кроме того, в отличие от классической физики, меняются и компоненты скоростей, ортогональные направлению движения. Аналогичные вычисления для других компонент скоростей дают:

$$\upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \upsilon'_x \, \upsilon / c^2}, \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \upsilon'_x \, \upsilon / c^2}.$$

Таким образом, получены формулы для преобразования скоростей в релятивистской механике. Формулы обратного преобразования получаются при замене штрихованных величин на нештрихованные и обратно и заменой υ на $-\upsilon$.

На рис. 10.8 приведен график зависимости скорости частицы от времени. Подробно этот случай рассмотрен в задаче 10.1.

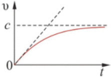


Рис. 10.8. Зависимость скорости частицы от времени. Пунктирной линией показано увеличение скорости нерелятивистской частицы под действием постоянной силы. Скорость релятивистской частицы асимптотически приближается к скорости света

При малых скоростях движения $\upsilon \ll c$ скорость пропорциональна времени. Такая зависимость соответствует *равноускоренному движению нерелятивистской частицы* под действием постоянной силы. При увеличении скорости движения $\upsilon \to c$, скорость частицы асимптотически приближается к скорости света.

Классическая физика – это теория, где допустима бесконечно большая скорость распространения сигналов. Такое допущение хорошо работает при малых скоростях объектов $\upsilon << c$.

Действительно, когда скорость движения подвижной системы отсчета $\upsilon << c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, мы получаем обычный закон сложения скоростей $\upsilon_x = \upsilon'_x + \upsilon$, $\upsilon_y = \upsilon'_y$, $\upsilon_z = \upsilon'_z$. При этом ход течения времени и длина линейки будут одинаковы в обеих системах отсчета.

Таким образом, законы классической механики применимы, если скорости объектов много меньше скорости света. *Теория относительности не зачеркнула достижения классической физики, она установила рамки их справедливости.*

Рассмотрим закон сложения скоростей на примере.

Пусть тело внутри космического корабля движется со скоростью $\upsilon' = 2 \cdot 10^8$ м/с и сам корабль движется с такой же скоростью $\upsilon = 2 \cdot 10^8$ м/с относительно Земли. Чему равна скорость тела относительно Земли υ_x? Используем для рассмотрения примера рис. 10.1.

Классическая механика ответит на этот вопрос просто: в соответствии с преобразованиями Галилея скорость тела относительно Земли будет

$$\upsilon_x = \upsilon' + \upsilon = 4 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

что, конечно же, противоречит положению СТО о том, что ***скорость света является предельной скоростью переноса информации, вещества и взаимодействий***: $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Оценим скорость тела, используя преобразования Лоренца.

Внутри корабля перемещение dx' за время dt' равно: $dx' = \upsilon' dt'$. Найдем υ_x с точки зрения наблюдателя на Земле, исходя из ***правила сложения скоростей*** *в релятивистской механике* (10.5.1):

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon\upsilon'}{c^2}}.$$

Скорость тела в нашем примере в соответствии с этой формулой

$$\upsilon_x = 2{,}8 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Полученный результат не противоречит положению СТО о предельности скорости света.

В предельном случае, если движение происходит со скоростью света, то

$$v_x = \frac{c+c}{1+\dfrac{c^2}{c^2}} = c.$$

При медленных движениях, когда $v << c$, получаем нерелятивистские формулы, соответствующие преобразованиям Галилея.

Вопрос о ***сложении скоростей*** *в релятивистской механике* подробно, со всеми предельными случаями разобран в задаче 10.2.

Полученные формулы сложения скоростей запрещают движение со скоростью большей, чем скорость света. Уравнения Лоренца преобразуют время и пространство так, что свет распространяется с одинаковой скоростью с точки зрения всех наблюдателей, независимо, двигаются они или покоятся.

В настоящее время в научной литературе продолжается обсуждение проблемы существования частиц, движущихся со скоростью большей скорости света. Они получили название *тахионы* (от греч. *tachys* – быстрый). Анализ экспериментальных данных не позволяет пока говорить о реальности этих объектов.

10.6. Релятивистская механика

Релятивистское выражение для импульса

Найдем такое выражение для импульса, чтобы закон сохранения импульса был инвариантен к преобразованиям Лоренца при любых скоростях (как мы уже говорили, уравнения Ньютона не инвариантны к преобразованиям Лоренца и закон сохранения импульса в системе k выполняется, а в k' – нет).

Ньютоновское выражение для импульса $\vec{p} = m\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, или $p = m\dfrac{dx}{dt}$. Вот это выражение надо сделать инвариантным. Это возможно, если в него будут входить инвариантные величины. В выражении

$$p = m\frac{dx}{dt} \qquad (10.6.1)$$

m – масса частицы в системе k, ***инвариантная величина***[f]; dt – интервал времени по часам неподвижного наблюдателя.

[f] В соответствии с трактовкой, принятой в современной литературе, решено было отказаться от устаревших понятий релятивистской массы частицы и её массы покоя. Здесь рассматривается только инвариантная масса, обозначаемая m.

Если заменить $\mathrm{d}t$ на $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2}$ – *собственное время частицы*, тоже инвариантная величина, то получим инвариантное выражение для импульса $p = m\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$.

Преобразуем это выражение с учетом того, что $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

$$p = m\frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ или } \vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (10.6.2)$$

Это и есть ***релятивистское выражение для импульса*** (рис. 10.9).

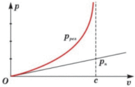


Рис. 10.9. Зависимость импульса частицы от скорости в классической и релятивистской механике. Когда скорость релятивистской частицы приближается к скорости света, её импульс возрастает до бесконечности

Из (10.6.2) следует, что *никакое тело* не может двигаться со скоростью большей или *даже равной скорости света* (при $\upsilon \to c$ знаменатель стремится к нулю, тогда $p \to \infty$, что невозможно в силу закона сохранения импульса).

Релятивистское выражение для энергии

По определению $\vec{p}$ – импульс релятивистской частицы, а скорость изменения импульса равна силе, действующей на частицу, $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$.

Работа силы по перемещению частицы идет на увеличение энергии частицы:

$$\mathrm{d}A = \left(\vec{F}, \mathrm{d}\vec{r}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \mathrm{d}\vec{r}\right) = \left(\mathrm{d}\vec{p}, \vec{\upsilon}\right) = \mathrm{d}E.$$

После интегрирования этого выражения получим ***релятивистское выражение для полной энергии*** частицы:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (10.6.3)$$

При $\upsilon = 0$ в системе координат, где частица покоится, выражение (10.6.3) преобразуется:

$$E_0 = mc^2 \qquad (10.6.4)$$

– ***энергия покоя***. Мы пришли к знаменитой ***формуле Эйнштейна***.

Выражение (10.6.4) является инвариантным относительно преобразований Лоренца.

Именно утверждение о том, что в покоящейся массе (материи) огромные запасы энергии, является главным практическим следствием СТО. E_0 – ***внутренняя энергия частицы*** (*учитывающая все*).

Полная энергия в теории относительности складывается из энергии покоя и кинетической энергии K. Тогда

$$E_{к} = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Как видно из графика зависимости кинетической энергии релятивистской частицы от её скорости (рис. 10.10), когда скорость частицы приближается к скорости света, её энергия возрастает до бесконечности.

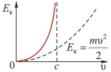


Рис. 10.10. Зависимость кинетической энергии релятивистской частицы от её скорости. Пунктиром показана зависимость энергии классической частицы от скорости

Справедливость теории проверяется *принципом соответствия*: при $\upsilon << c$ (нерелятивистский предел) формула (10.6.2) примет вид $\vec{p} \approx m\vec{\upsilon}$, а выражение для энергии (10.6.3) преобразуется к виду $E_{к} \approx m\upsilon^2/2$.

Получим еще одно очень важное соотношение, связывающее полную энергию с импульсом частицы.

Из уравнения (10.6.2) получим

$$\upsilon^2 = \frac{p^2}{m^2 + \dfrac{p^2}{c^2}} = \frac{p^2c^2}{m^2c^2 + p^2}.$$

Подставив в (10.6.3), получим:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2c^2}{(m^2c^2 + p^2)c^2}}},$$

отсюда

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}. \qquad (10.6.5)$$

Или

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4.$$

Таким образом, получено инвариантное выражение, связывающее энергию и импульс.

Измеренные в разных системах координат E и $\vec{p}$ будут разными, но их разность будет одинакова в любой системе координат.

Изменяются при переходе из одной системы координат в другую лишь t, E, $\vec{p}$, $\vec{r}$, а m – величина инвариантная.

Сделаем важное замечание. Означает ли утверждение об эквивалентности массы и энергии, что они сходны по существу? Нет, не означает. Масса – инвариант, энергия – динамическая характеристика состояния частицы совсем другой природы. Она зависит от выбора системы отсчета. Взаимосвязь массы и энергии имеет смысл только в системе покоя частицы, по этой причине понятие «массы» $m/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$, зависящей от скорости, лишено какого-либо содержания.

10.7. Взаимосвязь массы и энергии покоя

Масса и энергия покоя связаны уравнением

$$E_0 = mc^2, \tag{10.7.1}$$

из которого вытекает, что всякое изменение массы Δm сопровождается изменением энергии покоя ΔE_0.

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m.$$

Это утверждение носит название закона ***взаимосвязи массы и энергии покоя***, оно стало символом современной физики.

Взаимосвязь между массой и энергией оценивалась А. Эйнштейном как самый значительный вывод специальной теории относительности. По его выражению, масса должна рассматриваться как «сосредоточение колоссального количества энергии». При этом масса в теории относительности не является более сохраняющейся величиной, а зависит от выбора системы отсчета и характера взаимодействия между частицами.

Определим энергию, содержащуюся в 1 г любого вещества, и сравним ее с химической энергией, равной $2{,}9\cdot 10^4$ Дж, получаемой при сгорании 1 г угля. Согласно уравнению Эйнштейна, $E = mc^2$, имеем

$$E_0 = (10^{-3}\ \text{кг})(3\cdot 10^8\ \text{м}\cdot\text{с}^{-1})^2 = 9\cdot 10^{13}\ \text{Дж}.$$

Таким образом, собственная энергия в $3{,}1\cdot 10^8$ раз превышает химическую энергию.

Из этого примера видно, что если высвобождается лишь одна тысячная доля собственной энергии, то и это количество в миллионы раз больше того, что могут дать обычные источники энергии.

Суммарная масса взаимодействующих частиц не сохраняется.

Рассмотрим другой пример. Пусть две одинаковые по массе частицы m движутся с одинаковыми по модулю скоростями навстречу друг другу и абсолютно неупруго столкнутся.

До соударения полная энергия каждой частицы E равна: $E = mc^2/\sqrt{1-\beta^2}$. Полная энергия образовавшейся частицы Mc^2. Эта новая частица имеет скорость $\upsilon = 0$. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = Mc^2,$$

отсюда M равно:

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\beta^2}} > 2m. \tag{10.7.2}$$

Таким образом, *сумма масс исходных частиц* $2m$ *меньше массы образовавшейся частицы* M. В этом примере кинетическая энергия частиц превратилась в эквивалентное количество энергии покоя, а это привело к возрастанию массы:

$$\Delta M = \frac{\Delta K}{c^2}$$

(это при отсутствии выделения энергии при соударении частиц).

Пусть система (ядро) состоит из N частиц с массами $m_1, m_2 \ldots m_i$. Ядро не будет распадаться на отдельные частицы, если они связаны друг с другом. Эту связь можно охарактеризовать энергией связи $E_{св}$. *Энергия связи – энергия, которую нужно затратить, чтобы разорвать связь между частицами и разнести их на расстояние, при котором взаимодействием частиц друг с другом можно пренебречь.*

$$E_{св} = c^2\sum_{i=1}^{n} m_i - Mc^2 = c^2\Delta M, \tag{10.7.3}$$

где $\Delta M = (m_1 + m_2 + \ldots + m_i) - M$; ΔM – дефект массы.

Видно, что $E_{св}$ будет положительна, если $M < \sum_{i=1}^{n} m_i$, что и наблюдается на опыте.

При слиянии частиц энергия связи высвобождается (часто в виде электромагнитного излучения).

Например, ядро U^{238} имеет энергию связи

$$E_{св} = 2{,}9\cdot 10^{-10}\ \text{Дж} \approx 1{,}8\cdot 10^{9}\ \text{эВ} = 1{,}8\ \text{ГэВ}.$$

Ядерные реакции

Ядерной реакцией *называется процесс взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или другим ядром, приводящий к преобразованию исходного ядра.* Например:

$$^{7}_{3}\mathrm{Li}+^{1}_{1}\mathrm{H}\rightarrow^{4}_{2}\mathrm{He}+^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Это реакция взаимодействия протона с ядром лития. Реакция протекает с выделением энергии.

В ядерной энергетике большой практический интерес имеют реакции с участием нейтронов, в частности реакция деления ядер $^{235}_{92}\mathrm{U}$:

$$^{235}_{92}\mathrm{U}+^{1}_{0}n\rightarrow^{95}_{39}\mathrm{Y}+^{139}_{53}\mathrm{I}+2\left(^{1}_{0}n\right).$$

Реакция протекает при захвате ядрами $^{235}_{92}\mathrm{U}$ медленных нейтронов. Ядра иттрия и йода – это осколки деления. Ими могут быть и другие ядра. Характерно, что в каждом акте деления возникает 2–3 нейтрона, которые могут вызвать деление других ядер урана, причем также с испусканием нейтронов. В результате количество делящихся ядер стремительно нарастает. Возникает *цепная ядерная реакция* с выделением большого количества энергии.

Устройство, в котором поддерживается управляемая реакция деления атомных ядер, называется *ядерным реактором*. Его основные элементы: ядерное топливо, замедлитель нейтронов, теплоноситель для отвода тепла и устройство для регулирования скорости реакции (рис. 10.11).

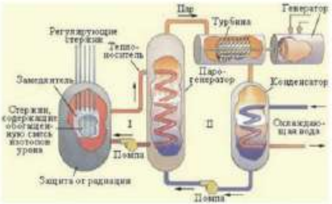


Рис. 10.11. Атомная электростанция

Термоядерные реакции

Термоядерные реакции *– это реакции синтеза легких ядер, протекающие при очень высоких температурах*. Высокие температуры необходимы для сообщения ядрам энергии, достаточной для того, чтобы сблизиться до расстояния, сравнимого с радиусом действия ядерных сил (10^{-15} м).

Энергия, выделяющаяся в процессе термоядерных реакций в расчете на один нуклон, существенно превышает удельную энергию, выделяющуюся в процессе реакций деления тяжелых ядер. Так, при синтезе тяжелого водорода – дейтерия, со сверхтяжелым изотопом водорода – тритием, выделяется энергия около 3,5 МэВ на один нуклон, в то время как в процессе деления ядер урана, выделяется примерно 0,85 МэВ энергии на один нуклон.

Термоядерная реакция синтеза дейтерия с тритием:

$$ {}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \to {}_2^4\mathrm{He} + {}_2^4\mathrm{He} + {}_0^1 n + 17{,}6\ \text{МэВ}, $$

наиболее перспективна в плане получения практически неисчерпаемого источника энергии. Однако, осуществление такой реакции в управляемом режиме, равно как и других реакций синтеза, в настоящее время является пока проблемной задачей, хотя успехи в этом направлении несомненны. В настоящее время уже получена плазма, температура которой порядка $2 \cdot 10^8$ К, а время удержания не менее 2 с при выделяемой мощности до 2 МВт.

На рис. 10.12 изображена одна из моделей термоядерного реактора ТОКАМАК.

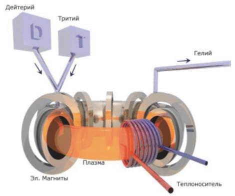


Рис. 10.12. Модель термоядерного реактора ТОКАМАК

Есть надежда, что термоядерный реактор практического применения будет создан уже в первой четверти XXI века.

Выделяется в виде энергии не более 0,1 % массы вещества. Полностью энергия покоя выделяется только при ***аннигиляции*** в виде электромагнитного излучения, как, например, при *аннигиляции электрона* и *позитрона* (рис. 10.13).

На рис. 10.14 представлен фотоснимок треков частиц при аннигиляции антипротона на протоне.

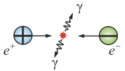


Рис. 10.13. Схема аннигиляции электрона и позитрона

Рис. 10.14. Треки частиц при аннигиляции антипротона на протоне

Контрольные вопросы. Упражнения

1. В чем физическая сущность механического принципа относительности?
2. В чем заключается правило сложения скоростей в классической механике?
3. Каковы причины возникновения специальной теории относительности?
4. В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?
5. Зависит ли от скорости движения системы отсчета скорость тела? скорость света?
6. Запишите и прокомментируйте преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?
7. Какой вывод о пространстве и времени можно сделать па основе преобразований Лоренца?
8. Одновременны ли события в системе *K'*, если в системе *K* они происходят в одной точке и одновременны? в системе *K* события разобщены, но одновременны? Обоснуйте ответ.
9. Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета? Обоснуйте ответ.

10. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25 %?

11. В чем состоит «парадокс близнецов» и как его разрешить?

12. В чем заключается релятивистский закон сложения скоростей? Как показать, что он находится в согласии с постулатами Эйнштейна?

13. Как определяется интервал между событиями? Докажите, что он является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

14. Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?

15. В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса?

16. Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике? При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу? Сделайте этот переход.

17. Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии. В чем его физическая сущность? Приведите примеры его экспериментального подтверждения.

18. Почему формула, связывающая массу и энергию, не может быть названа формулой превращения массы в энергию, а является формулой соотношения между этими величинами?

Примеры решения задач

Задача* 10.1. Тело начинает двигаться из состояния покоя под действием силы F. Найти зависимость скорости тела от времени. Сравнить с классическим результатом.

Решение. Так как скорость тела в этом случае будет направлена вдоль линии силы, можно записать основное уравнение динамики в скалярной форме:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\upsilon(t)}{\sqrt{1-\upsilon^2(t)/c^2}}\right)=F,$$

где $\upsilon(t)$ – скорость тела в момент времени t, причем $\upsilon(0)=0$. Интегрируя, находим:

$$\frac{\upsilon(t)}{\sqrt{1-\upsilon^2(t)/c^2}}=\frac{F}{m}t=a_{\text{кл}}t,$$

где $a_{\text{кл}}=F/m$ – классическое ускорение тела. Возводя уравнение в квадрат, получаем зависимость скорости от времени:

$$\upsilon(t)=\frac{a_{\text{кл}}t}{\sqrt{1+(a_{\text{кл}}t/c)^2}}=\frac{c}{\sqrt{1+(a_{\text{кл}}t/c)^2}}.$$

Таким образом, в любой момент времени $\upsilon(t) < c$, а при $t \to \infty$ скорость тела становится все ближе к скорости света (см. рис. 10.8). В случае небольших значений времени $(t << c/a_{c1})$ мы получаем результат классической нерелятивистской механики для равноускоренного движения:

$$\upsilon(t) \approx a_{c1} t.$$

Приведем численные оценки. Пусть ракета движения с ускорением (классическим) $a_{c1} = g = 9{,}8\ м/c^2$ (т. е. космонавты испытывают привычную земную силу тяжести). Согласно классическому закону движения ракета достигнет скорости света через время $t_{c1} = c/a_{c1} = 3 \cdot 10^8/9{,}8 = 3{,}06 \cdot 10^7$ с, т. е. примерно через год. На самом деле в этот момент времени ее скорость будет

$$\upsilon(t_{c1}) = \frac{c}{\sqrt{1 + (c/a_{c1} t_{c1})^2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ c.$$

Через два года пути скорость станет равной

$$\upsilon(2t_{c1}) = c/\sqrt{1 + 0{,}25} = 0{,}894\ \text{ñ};$$

через пять лет будет $\upsilon(5t_{c1}) = c/\sqrt{1 + 0{,}04} = 0{,}891\ c$;

через 10 лет получим $\upsilon(10t_{c1}) = c/\sqrt{1 + 0{,}01} = 0{,}995\ c$, и т. д.

Сколько бы времени ни ускорялась ракета, ее скорость никогда не достигнет скорости света.

Задача 10.2. Тело со скоростью υ_0 налетает перпендикулярно на стенку, движущуюся ему навстречу со скоростью υ. Пользуясь формулами для релятивистского сложения скоростей, найти скорость υ_1 тела после отскока. Проанализировать предельные случаи, если удар абсолютно упругий, масса стенки намного больше массы тела. Найти скорость υ_1, если $\upsilon_0 = \upsilon = c/3$.

Решение. Воспользуемся *правилом сложения скоростей* в релятивистской механике: $\upsilon_x = \dfrac{\upsilon_x' + \upsilon}{1 + \upsilon_x' \upsilon / c^2}$.

Отсюда получим формулу для обратного преобразования:

$$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - \upsilon}{1 - \upsilon_x \upsilon / c^2}, \tag{1}$$

где υ – скорость системы отсчета k' относительно системы k. Направим ось x вдоль начальной скорости тела υ_0 и свяжем систему отсчета k' со стенкой. Тогда $\upsilon_x = \upsilon_0$ и $\upsilon = -\upsilon$. В системе отсчета, связанной со стенкой, начальная скорость υ_0' тела, согласно уравнению (1), равна:

$$\upsilon_0' = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{1 + \upsilon_0 \upsilon / c^2}.$$

Поскольку стенку можно считать бесконечно массивной, по закону сохранения энергии после упругого удара тело отскочит в обратном направлении с тем же (относительно стенки) абсолютным значением скорости:

$$\upsilon_1' = -\upsilon_0' = -\frac{\upsilon_0 + \upsilon}{1 + \upsilon_0 \upsilon / c^2}.$$

Вернемся теперь назад в систему отсчета k. Подставляя в $\upsilon_x = \dfrac{\upsilon_x' + \upsilon}{1 + \upsilon_x' \upsilon / c^2}$ υ_1' вместо υ_x' и учитывая, что $\upsilon = -\upsilon$, после преобразований находим искомую скорость:

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon_1' - \upsilon}{1 - \upsilon_1' \upsilon / c^2} = -\frac{\upsilon_0 \left(1 + \upsilon^2 / c^2\right) + 2\upsilon}{1 + 2\upsilon_0 \upsilon / c^2 + \upsilon^2 / c^2}. \qquad (2)$$

Проанализируем ***предельные случаи***.

1. Если скорости тела и стенки малы $(\upsilon_0 << c, \upsilon << c)$, то можно пренебречь всеми членами, где эти скорости делятся на скорость света. Получаем тогда из (2) результат классической механики $\upsilon_1 = -(\upsilon_0 + 2\upsilon)$: скорость шара после отскока увеличивается на удвоенную скорость стенки и направлена, естественно, противоположно начальной. Ясно, что в релятивистском случае этот результат не годится. Из него следует, что скорость тела после отскока будет равна $\upsilon_1 = -c$, чего не может быть.

2. Пусть теперь на стенку налетает тело движущееся со скоростью света (например, луч света отражается от движущегося зеркала). Подставляя $\upsilon_0 = c$ в соотношение (2), получаем

$$\upsilon_1 = -\frac{c\left(1 + \upsilon^2 / c^2\right) + 2\upsilon}{1 + 2c\upsilon / c^2 + \upsilon^2 / c^2} = -c\frac{(1 + \upsilon / c)^2}{(1 + \upsilon / c)^2} = -c.$$

Отсюда видно, что скорость луча света изменила направление, но не свою абсолютную величину, как и должно быть.

3. Рассмотрим теперь случай, когда стенка движется с релятивистской скоростью: $\upsilon \to c$. В этом случае (2)дает нам

$$\upsilon_1 \to -\frac{2\upsilon_0 + 2c}{2 + 2\upsilon_0 c / c^2} = -c.$$

То есть тело после отскока также будет двигаться со скоростью, близкой к скорости света.

4. Наконец, подставим в (2) значения $\upsilon_0 = \upsilon = c/3$, тогда $\upsilon_1 = -0{,}78c$. Таким образом, в отличие от классической механики, теория относительности дает для скорости после отскока значение, меньшее скорости света.

5. Посмотрим, что случится, если стенка удаляется от тела с той же скоростью $(\upsilon = -\upsilon_0)$. В этом случае из (2) получим:

$$\upsilon_1 = -\frac{\upsilon_0\left(1+\upsilon_0^2/c^2\right)-2\upsilon_0}{1-2\upsilon_0^2/c^2+\upsilon_0^2/c^2} = -\frac{\upsilon_0\left(-1+\upsilon_0^2/c^2\right)}{1-\upsilon_0^2/c^2} = \upsilon_0.$$

Как и в классической механике, тело стенку не догонит, и его скорость не изменится.

Задача 10.3. В ускорителе электронов – бетатроне – частицы приобретают энергию $E_к = 0{,}67$ МэВ. До какой скорости разгоняются электроны?

Дано:
$E_к = 0{,}67$ МэВ = $1{,}072 \cdot 10^{-13}$ Дж
υ – ?

Решение. Кинетическая энергия релятивистской частицы находится по формуле:

$$E_к = E - E_0 = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

где $\beta = \upsilon/c$ – скорость частицы, выраженная в долях скорости света.

Отсюда запишем:

$$\frac{E_к}{E_0} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_к}{E_0}+1\right)^2}} = 0{,}902.$$

Скорость, до которой разгоняют электроны: $\upsilon = \beta c$;

$$\upsilon = 0{,}902 \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}71 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon = 2{,}71 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 10.4. Поток энергии, излучаемый Солнцем, $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт. За какое время масса солнца уменьшится в 2 раза? Излучение Солнца считать постоянным.

Дано:
$P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт
$m_0/m = 0$
t – ?

Решение. Изменение массы системы на Δm соответствует изменению энергии системы на величину

$$\Delta E = c^2 \Delta m.$$

За время t при постоянном излучении Солнце выделит энергию $\Delta E = Pt$, а потеряет при этом массу $\Delta m = m_0/2$, где $m_0 = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца. Тогда

$$Pt = \frac{c^2 m_0}{2}, \text{ откуда время: } t = \frac{c^2 m_0}{2P}.$$

$$[t]=\left[\frac{м^2\cdot кг}{с^2\cdot Вт}\right]=\left[\frac{м^2\cdot кг\cdot с}{с^2\cdot кг\cdot Дж}\right]=\left[\frac{м^2\cdot кг\cdot с\cdot с^2}{с^2\cdot кг\cdot м^2}\right]=с.$$

$$t=\frac{3\cdot 10^8\cdot 1{,}98\cdot 10^{30}}{2\cdot 4\cdot 10^{26}}=0{,}74\cdot 10^{12}\ с.$$

Ответ: $t=0{,}74\cdot 10^{12}$ с.

Задача 10.5. Реакция деления ядра урана $^{235}_{92}U$ сопровождается выделением энергии $\Delta E_0=200$ МэВ. Определите изменение массы Δm при делении одного моля урана.

Дано:	**Решение.**
$\Delta E_0=200$ МэВ = $3{,}2\cdot 10^{-11}$ Дж $\nu=1$ моль $N_A=6{,}022\cdot 10^{23}$ Δm – ?	Изменение массы: $\Delta m=\dfrac{\Delta E}{c^2}$. При делении ν молей урана освобождается энергия: $\Delta E=\Delta E_0\nu N_A$, где ΔE_0 – энергия, освобождаемая при делении одного ядра, N_A – число Авогадро.

Исходя из этого получим:

$$\Delta m=\frac{\Delta E_0\nu N_A}{c^2},\ [\Delta m]=\left[\frac{Дж\cdot моль\cdot с^2}{моль\cdot м^2}\right]=\left[\frac{кг\cdot м^2\cdot с^2}{с^2\cdot м^2}\right]=кг.$$

$$\Delta m=\frac{3{,}2\cdot 10^{-11}\cdot 1\cdot 6{,}022\cdot 10^{23}}{\left(3\cdot 10^8\right)^2}=0{,}2\cdot 10^{-5}\ кг.$$

Ответ: $\Delta m=0{,}2\cdot 10^{-5}$ кг.

Задача 10.6. Электрон движется со скоростью $\upsilon=0{,}6c$. Определите релятивистский импульс и кинетическую энергию электрона.

Дано:	**Решение.**
$\upsilon=0{,}6c$ p – ? K – ?	Релятивистский импульс p определяется по формуле: $p=\dfrac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$, где $m_0=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг – масса покоя

электрона. Подставив численные данные, для импульса получим:

$$p=\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 0{,}6\cdot 3\cdot 10^8}{\sqrt{1-\left(0{,}6\cdot 3\cdot 10^8/3\cdot 10^8\right)^2}}=2{,}05\cdot 10^{-22}\ \frac{кг\cdot м}{с}.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы:

$$K=E-E_0=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right)=20{,}5\cdot 10^{-15}\ Дж.$$

Ответ: $p=2{,}05\cdot 10^{-22}\ \frac{кг\cdot м}{с}$; $K=20{,}5\cdot 10^{-15}$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

Задача* 10.1. Оцените с помощью соотношений неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося внутри сферы радиусом $R = 0{,}05$ нм, со скоростью $\upsilon \ll c$.

Ответ: $E_{\text{к min}} = \dfrac{\hbar^2}{2R^2 m} = 15$ эВ.

Задача 10.2. Предположим, что мы можем измерить длину стержня с точностью $\Delta l = 0{,}1$ мкм. При какой относительной скорости u двух инерциальных систем отсчета можно было бы обнаружить релятивистское сокращение длины стержня, собственная длина l_0 которого равна 1 *м*?

Ответ: $u = c\sqrt{2\Delta l / l_0} = 134$ км/с.

Задача 10.3. Двое часов после синхронизации были помещены в начало системы координат K и K', движущихся друг относительно друга. При какой скорости u их относительного движения возможно обнаружить релятивистское замедление хода часов, если собственная длительность τ_0 измеряемого промежутка составляет 1 с? Измерение времени производится с точностью $\Delta\tau = 10$ пс.

Ответ: $u = c\sqrt{2\Delta\tau / \tau_0} = 1{,}34$ км/с.

Задача 10.4. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Скорость спутника υ_0 составляет 7,9 км/с. На сколько отстанут часы на спутнике по измерениям земного наблюдателя за время τ_0 0,5 года?

Ответ: $\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}\tau_0 = 0{,}57$ с.

Задача 10.5. В системе K' покоится стержень, собственная длина l_0 которого равна 1 м. Стержень расположен так, что составляет угол $\varphi_0 = 45°$ с осью x'. Определите длину l стержня и угол φ в системе K, если скорость υ_0 системы K' относительно K равна 0,8 c.

Ответ: $l = l_0\sqrt{1 - \left(\upsilon_0^2/c^2\right)\cos^2\varphi} = 0{,}825$ м.

Задача 10.6. В лабораторной системе отсчета (K-системе) пи-мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние $l = 75$ м. Скорость υ пи-мезона равна 0,995 c. Определить собственное время жизни τ_0 пи-мезона.

Ответ: $\tau_0 = \dfrac{1}{\upsilon}\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}} = 25$ нс.

Задача 10.7. В лабораторной системе отсчета одна из двух одинаковых частиц покоится, другая движется со скоростью $\upsilon = 0{,}8c$ по направлению к покоящейся частице. Определить: 1) релятивистскую массу движущейся частицы в лабораторной системе отсчета; 2) скорость частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции системы; 3) релятивистскую массу частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции.

Ответ: 1) $(5/3)m_0 = 1{,}67m_0$; 2) $\upsilon = c/2$; $2m_0/\sqrt{3} = 1{,}15m_0$.

Задача 10.8. На сколько процентов изменятся продольные размеры протона и электрона после прохождения ими разности потенциалов $U = 10^6$ В?

Ответ: $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)_e = 66{,}1$ %; $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)_p = 0{,}1$ %.

Задача 10.9. При какой скорости масса движущегося электрона вчетверо больше массы покоя?

Ответ: $\upsilon = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}}$; $\upsilon \approx 2{,}9 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 10.10. Две ракеты движутся навстречу друг другу со скоростью 3/4c относительно неподвижного наблюдателя k. Определить скорость сближения ракет.

Ответ: $U = \dfrac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{1 + \frac{\upsilon_1\upsilon_2}{c^2}}$; $U = 2{,}88 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 10.11. Стержень, собственная длина которого равна l_0, покоится в системе отсчета K'; он расположен так, что составляет с осью x' угол φ. Какой угол составляет этот стержень с осью x другой системы отсчета K? Чему равна длина этого стержня в системе K?

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi' = \dfrac{\Delta y'}{\Delta x'}$; $l = l_0\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}\cos^2}$.

Задача 10.12. В K-системе отсчета мю-мезон, движущийся со скоростью $\upsilon = 0{,}99$ с, пролетел от места рождения до точки распада расстояние $l = 3$ км. Определить: 1) собственное время жизни мезона; 2) расстояние, которое пролетел мезон в K-системе с «его точки зрения».

Ответ: $\tau_0 = \dfrac{l}{\upsilon}\sqrt{1 - \left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2} = 1{,}4$ мкс; $l' = l\sqrt{1 - \left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2} = 0{,}42$ км.

Задача 10.13. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\tau_0 = 10$ нс. Найти путь, который пройдет эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни $\tau = 20$ нс.

Ответ: $S = c\tau\sqrt{1-\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2} = 5$ l.

Задача 10.14. Две частицы движутся в K-системе отсчета под углом друг к другу, причем первая со скоростью υ_1, а вторая со скоростью υ_2. Найти скорость одной частицы относительно другой.

Ответ: $\upsilon_2' = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - \left(\frac{\upsilon_1\upsilon_2}{c_2}\right)^2}$.

Задача 10.15. В системе K' покоится стержень, собственная длина l_0 которого равна 1 м. Стержень расположен так, что составляет угол $\varphi = 45°$ с осью x'. Определить длину l стержня и угол φ в системе K, если скорость υ_0 системы K' относительно K равна 0,8 с.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{[illegible]}{1-\upsilon^2/c^2} = 59°$.

Задача 10.16. Частицы с зарядами z_1e и z_2e и с массами покоя m_{01} и m_{02} соответственно прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов, после чего масса частицы *1* составила $1/k$ массы частицы *2*. Найти разность потенциалов.

Ответ: $U = \frac{(m_{02} - km_{01})c^2}{e(kz_1 - z_2)}$.

Задача 10.17. Мощность излучения Солнца $3{,}9\cdot10^{26}$ Вт. Считая его излучение постоянным, найдите, за какое время масса Солнца уменьшится вдвое? Принять массу Солнца $1{,}9894\cdot10^{30}$ кг, скорость света в вакууме $3\cdot10^8$ м/с. Результат представьте в тератодах (1 Тера = 10^{12}) и округлите до целого числа.

Ответ: $t = \frac{Mc^2}{2P} = 7$ Ödöäë ö.

В далеком созвездии Тау-Кита
Все стало для нас непонятно.
Сигнал посылаем: «Вы что это там?»,
А нас посылают обра-а-а-а-тно.
В. Высоцкий.
В далеком созвездии Тау-Кита

ГЛАВА 11. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

В данной главе рассматривается обобщение теории тяготения Ньютона на основе специальной теории относительности, сделанное А. Эйнштейном. Эта теория была названа им общей теорией относительности (ОТО). В ОТО учитывается воздействие материи на свойства пространства и времени, а эти измененные свойства пространства-времени влияют на сам характер физических процессов.

11.1. Обобщение закона тяготения Ньютона

Между любыми видами материи существует универсальное взаимодействие, проявляющееся в притяжении тел.

Потенциальная энергия тела массой m в поле тяготения равна

$$U = m\varphi,$$

где φ – потенциал поля тяготения.

Если величина U мала по сравнению с энергией тела mc^2, т. е. если $(\varphi/c^2) << 1$ и тело движется со скоростью, намного меньшей скорости света ($\upsilon << c$), то мы имеем дело с классическим гравитационным полем, для которого справедлив закон всемирного тяготения Ньютона.

В полях тяготения обычных небесных тел это условие выполняется. Так, на поверхности Солнца $\varphi/c^2 \approx 4\cdot10^{-6}$, а на поверхности белых карликов – порядка 10^{-3}.

Теория тяготения Ньютона предполагает мгновенное распространение полей тяготения, что не согласуется с принципами специальной теории относительности, основанной на том экспериментальном факте, что любое взаимодействие распространяется со скоростью меньшей или равной скорости света. Поэтому теорию тяготения Ньютона нельзя применять к сильным полям тяготения, разгоняющим частицы до скорости, близкой к скорости света.

Теория тяготения Ньютона неприменима для описания движения частиц вблизи массивных тел (в частности, для описания траектории движении света в поле тяготения). Неприменима теория тяготения Ньютона и для описания переменных полей тяготения, создаваемых движущимися телами.

Обобщение теории тяготения на основе специальной теории относительности было сделано А. Эйнштейном в 1908–1916 гг. Эта теория была названа им общей теорией относительности (ОТО). В этой теории описываются *сильные гравитационные* поля ($\varphi/c^2 \approx 1$) и движение в них с большими скоростями ($\upsilon \approx c$). В ОТО учитывается воздействие материи на свойства пространства и времени, а эти измененные свойства пространства-времени влияют на сам характер физических процессов.

11.2. Принцип эквивалентности сил инерции и сил тяготения

Как мы уже говорили в п. 7.4, важнейшей особенностью полей тяготения является то, что тяготение совершенно одинаково действует на разные тела, сообщая им одинаковые ускорения, независимо от свойств тел. Это было известно еще в ньютоновской теории и положено в основу новой, эйнштейновской теории тяготения. Под действием гравитационной силы, $F = \gamma \dfrac{Mm_g}{r^2} = m_g g$, все тела вблизи поверхности Земли падают с одинаковым ускорением – *ускорением свободного падения*. Этот факт был установлен Ньютоном и может быть сформулирован как принцип строгой пропорциональности гравитационной массы m_g, определяющей взаимодействие тела с полем тяготения, и инертной массы m_{in}, определяющей сопротивление тела действующей на него силе и входящей во второй закон Ньютона:

$$F = m_{in} a.$$

Уравнение движения тела в поле тяготения записывается так:

$$m_{in}\vec{a} = m_g\vec{g},$$

где $\vec{a}$ – ускорение, приобретаемое телом под действием поля тяготения напряженностью $\vec{G} = \vec{g}$. В этом случае, согласно Ньютону, для всех тел $m_g = m_{in}$ и $\vec{a} = \vec{g}$ – ускорение не зависит от массы и равно напряженности поля тяготения.

Таким образом, все тела в поле тяготения и в поле сил инерции, при $\vec{a} = \vec{g}$, движутся совершенно одинаково. Например, движение тел в космическом корабле, летящем с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, и в корабле, находящемся на Земле в поле тяжести с напряженностью $\vec{G} = \vec{g}$, будет одинаковым. Силы инерции в ускоренно движущемся корабле будут неотличимы от гравитационных сил, действующих в истинном поле тяготения. *Поэтому* ***силы инерции*** *можно считать* ***эквивалентными гравитационным силам***.

Тождественность инерциальной и гравитационной масс, которую мы доказали в п. 7.4, является следствием эквивалентности сил инерции и сил тяготения. Этот факт называется ***принципом эквивалентности Эйнштейна***. *Согласно этому принципу все физические процессы в истинном поле тяготения и в ускоренной системе отсчета, при отсутствии тяготения, протекают одинаковым образом.* Это фундаментальный закон природы.

Следствием этого закона является то, что, находясь внутри закрытой кабины, невозможно определить, чем вызвана сила mg. Тем, что кабина движется с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$ или действием притяжения Земли?

Ярчайшим доказательством равенства сил инерции и гравитации является состояние невесомости космонавтов в космическом корабле (падают под действием гравитационных сил и отлетают под действием центробежных сил инерции).

Принцип эквивалентности – основополагающий в ОТО Эйнштейна.

11.3. Теория тяготения Эйнштейна. Основные положения ОТО

Итак, мы с вами показали, что силы инерции эквивалентны силам тяготения. Эквивалентность, однако, это не тождественность, существуют некоторые различия.

Допустим, $\vec{G} = \vec{a}$ (вагон движется прямолинейно). При уменьшении ускорения $\vec{a}$, напряженность эквивалентного поля должна изменяться во всех точках вагона одновременно, т. е. изменения должны распространяться мгновенно. Эти рассуждения предполагают так называемое дальнодействие сил инерции, в то время как возмущения гравитационного поля распространяются с конечной скоростью, равной скорости света. То есть гравитационные взаимодействия являются близкодействующими.

Ускоренно движущийся космический корабль имитирует только однородное поле тяготения, одинаковое по величине и направлению во всем пространстве. Но поля тяготения, создаваемые отдельными телами, не таковы. Чтобы имитировать, например, сферическое поле тяготения, надо, исходя из принципа эквивалентности, потребовать, чтобы истинное гравитационное поле создавалось локальными, соответствующим образом ускоренными в каждой точке системами отсчета.

В результате в любой конечной области пространство-время окажется искривленным – неевклидовым. Сумма углов треугольника в таком пространстве не равна π, отношение длины окружности к радиусу отлично от 2π, время в разных точках течет по-разному. Согласно Эйнштейну, истинное гравитационное поле есть проявление искривления четырехмерного пространства-времени.

Кривизна пространства-времени создается источниками гравитационного поля – массами вещества и всеми видами энергии, присутствующими в системе, поскольку энергия и масса эквивалентны:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Тяготение зависит не только от распределения масс в пространстве, но и от их движения, давления и напряжений, имеющихся в телах от всех физических полей. Движение тел в искривленном пространстве-времени происходит по кратчайшим траекториям – геодезическим, которые в трехмерном пространстве-времени воспринимаются как движение по искривленным траекториям с переменной скоростью. Изменение гравитационных полей в вакууме *распространяется со скоростью света.*

В основу ОТО положены два постулата.

1. *Принцип эквивалентности сил инерции и сил гравитации.* (*Этот факт можно считать доказанным. Эффекты гравитации и ускорения движения частиц – неразличимы*).

2. *Гравитационное взаимодействие распространяется с конечной скоростью, равной скорости света (с) в виде гравитационных волн.* (*Пока кванты гравитационного поля – гравитоны – не обнаружены*).

Еще одним ключевым моментом в ОТО является понятие *кривизны пространства-времени*. Проведем мысленный эксперимент (рис. 11.1).

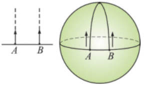


Рис. 11.1. Мысленный эксперимент, поясняющие то, что геометрические свойства пространства выступают в роли реально действующих сил

В ходе путешествия плоские двумерные существа отправившиеся из *A* и *B* по параллельным дорогам будут замечать, что они приближаются друг к другу (кривизны сферы, если она достаточно велика, они не замечали, не знали, что живут на сфере). И приближаются они все быстрее и быстрее – с ускорением, как будто под действием некой силы.

Назовем эту силу *гравитацией*. Наблюдатель со стороны видит, что сила кривизны выступает в роли силы, т. е. *геометрические свойства пространства выступают в роли реально действующих сил!*

Анализируя этот мысленный эксперимент и тот факт, что *любые массы притягиваются всегда*, Эйнштейн пришел к мысли, что *сила тяготения не есть специфическая сила*, то, что мы принимаем за силу притяжения, следует рассматривать лишь как *проявление специфики геометрических свойств пространства-времени.*

СТО оперирует плоским пространством-временем, а ОТО – искривленным. *Любая масса искривляет пространство-время, другая масса, попадая в область искривления, испытывает силу притяжения* (рис. 11.2).

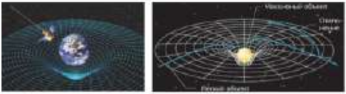


Рис. 11.2. Гравитация в ОТО рассматривается как геометрический эффект – проявление искривления пространства-времени. Тяжелая масса искривляет пространство-время – легкий объект отклоняется от своей траектории

Герман Минковский[51], бывший учитель математики Эйнштейна, ввел четырехмерное пространство-время и дал геометрическое представление теории относительности.

Математики Г. Риман[52] и Н. Лобачевский[53] создали теорию искривленного пространства произвольного числа измерений. Эйнштейн воспользовался математическими формулами Римана (четырехмерного пространства-времени).

Серьезная проверка положений ОТО началась лишь с двадцатых годов прошлого века, и пока нет ни одного факта, противоречащего ОТО.

11.4. Следствия из принципа эквивалентности, подтверждающие ОТО

1. Замедление времени в гравитационных полях

Общая теория относительности предсказывает замедление хода часов в гравитационных полях и изменение частоты фотонов в гравитационном поле. Пусть часы движутся с ускорением g, тогда их скорость, после того как они прошли расстояние x, равна: $\upsilon = \sqrt{2gx}$. С точки зрения неподвижного наблюдателя промежутки времени dt в неподвижной и dt_0 в подвижной системах отсчета связаны соотношением:

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dt_0}{\sqrt{1-\frac{2gx}{c^2}}},$$

где dt – промежуток времени в пространстве без поля.

Поскольку $\varphi = gx$ – гравитационный потенциал, то имеем в слабых гравитационных полях ($\varphi << c^2$)

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1-2\varphi/c^2}} \cong dt_0\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right),$$

– время течет тем медленнее, чем больше абсолютная величина гравитационного потенциала.

Этот эффект был подтвержден прямым экспериментом. В 1976 г. на высоту 10^4 км на ракете были подняты водородные часы, точность хода которых составляет 10^{-15} с. На Земле оставили точно такие же часы, предварительно синхронизировав с улетевшими часами. Через два года часы вернули и сравнили показания, разность $4{,}5\cdot10^{-10}$ с совпала с расчетной по ОТО, с точностью 0,02 %.

2. Красное гравитационное смещение частоты фотонов

При приближении света к телам, создающим гравитационное поле, частота света убывает с увеличением абсолютной величины потенциала поля.

Для частоты света в гравитационном поле можно записать:

$$\nu = \nu_0\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right),$$

где ν – частота света с точки зрения неподвижного наблюдателя, ν_0 – частота света в подвижной системе отсчета.

Так, если свет испускается в точке с потенциалом φ_1 и приходит в точку с потенциалом φ_2, то линии спектра смещаются в сторону красного цвета на величину

$$\Delta\nu = \nu(\varphi_1) - \nu(\varphi_2) = (\varphi_2 - \varphi_1)\frac{\nu_0}{c^2}.$$

Если на Земле наблюдать спектр, испускаемый Солнцем и звездами, то $|\varphi_2| < |\varphi_1|$ и $\Delta\nu < 0$, т. е. смещение происходит в сторону меньших частот (красный спектр) (рис. 11.3).

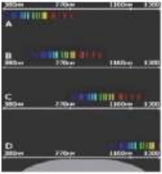


Рис. 11.3. Гравитационное смещение спектра в сторону меньших частот

Этот факт был доказан в ещё 1960 г. с помощью эффекта Мессбауэра и подтверждается ОТО с точностью до 1 %.

3. Отклонение светового луча массивными телами

ОТО объясняет вдвое большее отклонение светового луча вблизи массивных тел, чем это предсказывала теория Ньютона (рис. 11.4). Эксперимент был проведен ещё в 1919 г. Световой луч вблизи одной из планет отклонился на 1,75", тогда как по теории Ньютона искривление должно было произойти на 0,87", т. е. вдвое меньше.

Рис. 11.4. Отклонение светового луча в гравитационном поле массивных тел

4. Объяснение смещения орбиты Меркурия

Известно, что за 100 лет орбита Меркурия сместилась на 1° 33' 20". Из теории Ньютона следует, что смещение, за счет влияния планет, должно быть на 1° 32' 37", т. е. на 43" меньше. Подставив в формулы ОТО параметры Солнца и Меркурия, Эйнштейн получил скорость прецессии орбиты на 43" за 100 лет.

5. Черные дыры

ОТО предполагает наличие во Вселенной *черных дыр* – космических объектов, поглощающих все частицы, в том числе фотоны, подходящие к их поверхности (к горизонту событий) (рис. 11.5).

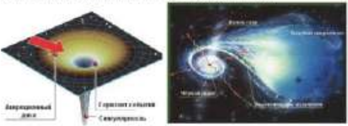


Рис. 11.5. Черная дыра – это самоподдерживающееся гравитационное поле, сконцентрированное в сильно искривленной области пространства-времени

Допуская, что фотон обладает гравитационной массой, можно оценить размеры r_g и массу M космического объекта, способного стать черной дырой. Для этого необходимо, чтобы кинетическая энергия фотона была меньше или равна его потенциальной энергии на бесконечности:

$$mc^2 \le \gamma \frac{mM}{r_g}.$$

Отсюда *критический радиус*, при котором массивное тело под влиянием своего собственного притяжения становится черной дырой (радиус Шварцшильда[34], или гравитационный радиус):

$$r_g \le \gamma \frac{M}{c^2}.$$

При этих условиях свет не сможет покинуть данный космический объект.

В качестве примера вычислим гравитационный радиус Земли, масса которой $M = 6 \cdot 10^{24}$ *кг*:

$$r_{g3} = \frac{\left(6{,}7 \cdot 10^{-11}\right)\left(6 \cdot 10^{24}\right)}{\left(3 \cdot 10^{8}\right)^2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}4 \text{ см}.$$

Это число означает, что для того, чтобы гравитационная энергия массы Земли была равна энергии массы покоя, необходимо было бы всю ее массу сжать в шарик диаметром примерно 1 см. Фактически же диаметр Земли имеет порядок 10^9 см.

Наиболее важным физическим содержанием понятия гравитационного радиуса является представление о том, что область внутри сферы такого радиуса как бы теряет всякую связь с областью вне этой сферы, за исключением гравитационной связи. Это означает, что свет не смог бы выйти из внутренней области. Во внешнем пространстве эта область проявляется лишь громадными силами тяготения. Пролетающие вблизи частицы и кванты излучения будут втягиваться внутрь сферы гравитационного радиуса и там исчезать. Поэтому такая область называется «черной дырой».

Уже есть достаточно веские доказательства существования черных дыр. Основная трудность состоит в том, что они поглощают все и почти ничего не излучают. Поэтому об их существовании можно судить по косвенным данным – поглощению вещества и испусканию в этом процессе излучения (рис. 11.5). Подобное явление можно наблюдать в системе двойных звезд, в частности, обычно называют двойную систему S_{yg}XI (Лебедь XI). *Пространство внутри черных дыр скручивается, время останавливается.*

Теория показывает, что при столкновении двух черных дыр, при взрыве сверхновой звезды или слиянии двойной нейтронной звезды происходит возмущение кривизны пространства-времени и возникают гравитационные волны, сжимающие и растягивающие вещество и пространство. Возможно, существует фон гравитационного излучения реликтового происхождения.

Предсказанные ОТО гравитационные волны в прямых экспериментах еще не наблюдались, но последствия их излучения системами небесных тел обнаружены. Согласно ОТО, период орбитального движения двойной звездной системы должен уменьшиться из-за излучения гравитационных волн. Это уменьшение открыто в системе, одним из компонентов которой является пульсар $PSR_{1913+16}$. По расчетам ОТО относительное уменьшение периода в этой системе за один оборот должно составлять $2{,}4\cdot10^{-12}$, а наблюдения дают значение $(2{,}3 \pm 0{,}2)\cdot10^{-12}$.

Все вышеизложенное говорит о правильности принципов, положенных в основу ОТО, о непротиворечивости ее выводов и фундаментальности предсказанных ею физических эффектов.

Глубокие идеи, заложенные в общей теории относительности, являются основой для построения квантовой теории тяготения, которая позволит объяснить эволюцию Вселенной.

Новые знания порождают новые вопросы, поскольку они расширяют область нашего соприкосновения с неизвестным.

Рене Декарт

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, изложение I части курса физики – физических основ механики – закончено. Начав его изучение с кинематики движения материальной точки, мы последовательно рассмотрели классические формулировки законов динамики материальной точки и твердого тела, обсудили виды и категории сил в природе, изложили законы сохранения и их связь с симметрией пространства и времени, рассмотрели теорию тяготения Ньютона и, указав на недостатки классической механики, перешли к современной физике, рассмотрев специальную теорию относительности и основные положения общей теории относительности.

Приведенный перечень разделов, изложенных в I части курса физики, позволяет проследить логику развития физики и основные периоды ее становления.

Со времени выхода в свет труда И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1678 г.), в котором он сформулировал основные законы механики и закон всемирного тяготения, прошло более трехсот лет. За это время физика прошла путь от макроскопического уровня изучения явлений до исследования материи на уровне элементарных частиц.

Однако, наряду с большими достижениями физики, во всех её разделах, в том числе и в механике, остается масса вопросов. Например, построение квантовой теории тяготения, проблемы физики плазмы и атомного ядра, построение теории сильных взаимодействий и т. д.

Отсюда становится ясно видна практическая важность фундаментальных физических исследований. Достижение нового экспериментального и теоретического понимания физических процессов и явлений послужит основой создания новейших технических решений, технологий, приборов и устройств.

Коллектив большой. Народ квалифицированный.
Работа проделана большая. Так не пойдет.
Огурцов.
Из к/ф «Карнавальная ночь»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Тюрин Ю.И. Ч.1. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие для технических университетов / Ю.И. Тюрин, И.П. Чернов, Ю.Ю. Крючков. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 2002. – 502 с.
2. Бондарев Б.В. Курс общей физики. В 3 кн. Кн. 1. Механика: учебное пособие / Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2005. – 352 с.
3. Калашников Н.П. Основы физики. В 2 т.: учебник для вузов / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – 3-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2007.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн. 1: учебное пособие для втузов / И.В. Савельев. – М.: АСТ Астрель, 2006. – 336 с.
5. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности: учебное пособие. – 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 336 с.
6. Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. – Изд. 14-е, перераб. и доп. / Т.И. Трофимова. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 560 с.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учебное пособие для вузов. В 5 т. Т. 1. Механика. – 3-е изд., стер. / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2006. – 560 с.
8. Чернов И.П. Физика: сборник задач. Часть 1. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие / И.П. Чернов, В.В. Ларионов, Ю.И. Тюрин. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 2004. – 390 с.
9. Детлаф А.А. Курс физики: учебное пособие для втузов. – 4-е изд., испр. / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк., 2002. – 718 с.
10. Дмитриева В.Ф., В.Л. Прокофьев. Основы физики: учебное пособие для студентов вузов. – 4-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009. – 527 с.
11. Иванов Б.Н. Законы физики. – М.: Наука, 1989. – 591 с.
12. Грибов Л.А., Прокофьева Н.И. Основы физики: учебник. – 3-е изд. – М.: Гардарики, 1998. – 564 с.
13. Ремизов А.Н., Потапенко А.Я. Курс физики: учебник для вузов. – М.: Дрофа, 2002. – 720 с.

14. Макаренко Г.М. Физика. Механика. Основы молекулярной физики и термодинамики. Т. 1. – Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 176 с.
15. Иродов И.Е. Задачи по общей физике – 12 изд., стер. / И.Е. Иродов, СПб.: «Лань», 2007. – 416 с.
16. Чертов В.Г. Задачник по физике. 8 изд., перераб. и доп. / В.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2007 – 640 с.

Дополнительная

1. Воронов В.К., Подоплелов А.В. Современная физика: учебное пособие.- М.: КомКнига, 2005.- 512 с.
2. Грин Б. Элегантная Вселенная/ Б. Грин – М.: Изд-во «Едиториал УРСС», 2004. – 288 с.
3. Джанколли Д. Физика. Т. 1. / Д. Джанколли- М.: Мир, 1989.
4. Чернов И.П. Физический практикум. Часть 1. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика: учебное пособие для технических университетов / И.П. Чернов, В.В. Ларионов, В.И. Веретельник. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – 182 с.
5. Трофимова Т.И. Курс физики. Задачи и решения: учебное пособие для втузов / Т.И. Трофимова, А.В. Фирсов. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 592 с.
6. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики: учебное пособие. – 2-е изд., испр. СПБ: Изд-во «Лань», 2008. – 352 с.
7. Трофимова Т.И., Павлова З.Г. Сборник задач по курсу общей физики с решениями. – М.: Высшая школа, 2003. – 592 с.
8. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. В 9 т. Т.1. / Р.Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М.: Мир, 1978.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: В 10 т. Т. 1: Механика. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с.
10. Рогачев Н.М. Курс физики: учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 448 с.
11. Кузнецов С.И. Физические основы механики: учебное пособие. – 2-е изд., испр., дополн. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 121 с.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Кинематика материальной точки

- Уравнение движения материальной точки $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- Вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$.
- Модуль вектора перемещения $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.
- Средняя скорость $\langle\vec{\upsilon}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.
- Мгновенная скорость $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$.
- Модуль скорости $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$.
- Среднее ускорение $\langle\vec{a}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$.
- Мгновенное ускорение $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$.
- Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
- Полное ускорение при криволинейном движении $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.
- Тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$.
- Нормальная составляющая ускорения $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{r}$.
- Кинетическое уравнение равномерного движения материальной точки вдоль оси x: $x = x_0 + \upsilon t$.
- Уравнения равнопеременного поступательного движения

$$x = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}; \qquad \upsilon = \upsilon_0 \pm at.$$

- Кинетическое уравнение равномерного вращения $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.
- Угловая скорость $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$.
- Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$.

- Период вращения $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
- Частота вращения $\nu = \dfrac{1}{T}$.
- Циклическая частота вращения $\omega = 2\pi\nu$.
- Уравнения равнопеременного вращательного движения

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t,\ \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

- Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении

$s = R\varphi$; $\upsilon = R\omega$; $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; $a_n = \upsilon^2/R = \omega^2 R$; $a_\tau = R \cdot \varepsilon$

2. Динамика материальной точки

- Импульс (количество движения) $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$.
- Закон сохранения импульса (для замкнутой системы)

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const}.$$

- Второй закон Ньютона $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$.
- Третий закон Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.
- Центр масс системы материальных точек $\vec{r}_c = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i$.
- Импульс системы тел $\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$.
- Теорема о движении центра масс $\vec{a}_c = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} F_{i\,внеш}$.

3. Силы в механике

- Связь веса тела с силой тяжести и реакцией опоры $\vec{G} = m\vec{g} = -\vec{R}$.
- Соотношение между весом, силой тяжести и ускорением

$$G = m(g \pm a).$$

- Сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N$.
- Для тела на наклонной плоскости

$$F_{тр} = \mu mg\cos\alpha, \qquad F = mg\sin\alpha, \qquad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

- Закон Гука для пружины $F_{упр} = -kx$.

- Связь между силой и потенциальной энергией $\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$.
- Потенциальная энергия упругой пружины $U = \frac{kx^2}{2}$.
- Работа, совершённая пружиной $A = -\frac{kx^2}{2}$.
- Напряжение $\sigma = \frac{F_{упр}}{S}$.
- Приращение длины $\Delta l = \frac{l_0 \sigma}{E}$.
- Относительное продольное растяжение (сжатие) $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E}$.
- Относительное поперечное растяжение (сжатие) $\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0}$.
- Коэффициент Пуассона $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$.
- Закон Гука для стержня $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$.
- Модуль Юнга $E = \frac{Fl_0}{S\Delta l}$.
- Объемная плотность потенциальной энергии $w_n = \frac{\sigma^2}{2E}$.

4. Неинерциальные системы отсчета

- Уравнение Ньютона для неинерциальной системы $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}$.
- Центростремительная сила $F_{цс} = ma_{цс} = m\frac{\upsilon^2}{R}$.
- Центробежная сила $F_{цб} = ma_n = m\omega^2 R$.
- Сила Кориолиса $\vec{F}_k = 2m[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}]$.

5. Энергия. Работа. Законы сохранения

- Кинетическая энергия $K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$.

- Изменение кинетической энергии $\Delta K = A$.
- Работа переменной силы на участке траектории 1–2 $A = \int_1^2 F \cos\alpha dS$.
- Мгновенная мощность $N = \frac{dA}{dt} = F\upsilon$.
- Средняя мощность $< N > = \frac{A}{\Delta t}$.
- Работа консервативных сил $A = U_1 - U_2$.
- Потенциальная энергия тела при гравитационном взаимодействии
$$U = mgh.$$
- Гравитационное взаимодействие между массами m и M
$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$
- Полная механическая энергия системы $E = K + U$.
- Закон сохранения полной механической энергии (для замкнутой системы) $K + U_{внутр} = E = \mathrm{const}$.
- Скорость шаров массами m_1 и m_2 после абсолютного упругого центрального удара
$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \text{ и } \upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$
- Скорость шаров после абсолютного неупругого удара
$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$
- Закон сохранения импульса при движении ракеты $m_p\upsilon_p = m_r\upsilon_r$.
- Формула Циолковского $\upsilon_p = -\upsilon_r \ln\frac{M_0}{M}$.

6. Динамика вращательного движения твёрдого тела

- Момент силы $\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$ или $M = Fr\sin\alpha = Fl$.
- Момент импульса относительно точки $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}]$.
- Основной закон динамики вращательного движения относительно точки $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{внеш}$.

- Момент импульса относительно неподвижной оси $L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i = I_z \omega$.
- Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела $M = I\varepsilon$.
- Закон сохранения момента импульса $\vec{L} = \text{const}$ или $I\vec{\omega} = \text{const}$.
- Момент инерции системы (тела) $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ или $I = \int_0^m R^2 \text{d}m$. υ
- Момент инерции полого и сплошного цилиндров (или диска) относительно оси симметрии $I_c = mR^2$, $I_c = \frac{1}{2}mR^2$.
- Момент инерции шара и сферы $I_c = \frac{2}{5}mR^2$, $I_c = \frac{2}{3}mR^2$.
- Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину $I_c = \frac{1}{12}ml^2$.
- Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец $I_c = \frac{1}{3}ml^2$.
- Теорема Штейнера $I = I_c + md^2$.
- Кинетическая энергия вращающегося тела $K_{вр} = \frac{I\omega^2}{2}$.
- Полная кинетическая энергия катящегося тела $K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$.
- Закон сохранения энергии для тела катящегося с высоты h

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

7. Теория тяготения Ньютона. Законы Кеплера

- Закон всемирного тяготения $F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}$ или $\vec{F} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$.
- Потенциальная энергия тела массы m, расположенного на расстоянии r от большого тела массы M $U = -\gamma\frac{Mm}{r}$.
- Напряжённость поля тяготения $\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$.

- Потенциал поля тяготения $\varphi = \frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{R}$.
- Взаимосвязь между потенциалом поля тяготения и его напряжённостью $\vec{G} = -\operatorname{grad}\varphi$.
- Работа по перемещению тела в гравитационном поле
$$A = m\left(\gamma \frac{M}{r_2} - \gamma \frac{M}{r_1}\right) = U_1 - U_2.$$
- Потенциальная энергия тела массой m на расстоянии r от Земли
$$U - U_3 = mgR_3^2\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{r}\right).$$
- Полная энергия тела в гравитационном поле
$E = K + U = \frac{m\upsilon^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const}$.
- Второй закон Кеплера $\frac{dS}{dt} = \text{const}$.
- Третий закон Кеплера $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$.
- Первая космическая скорость $\upsilon_1 = \sqrt{gR}$.
- Вторая космическая скорость $\upsilon_2 = \sqrt{2gR}$.

8. Механика жидкостей и газов

- Давление $P = \frac{F}{S}$.
- Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $S\upsilon = \text{const}$.
- Уравнение Бернулли $\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho gh + P = \text{const}$.
- Соотношение для гидравлического пресса $\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}$.
- Закон сообщающихся сосудов $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$.
- Архимедова сила $F_A = \rho gV$.
- Формула Торричелли $\upsilon = \sqrt{2gh}$.
- Формула Стокса $F = 6\pi\eta r\upsilon$.

- Формула Пуазейля $V = \pi R^4 \Delta P t / (8\eta l)$.
- Формула Лапласа для произвольной поверхности $\Delta P = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$.
- Формула Лапласа для сферической поверхности $\Delta P = 2\sigma / R$.
- Высота подъема жидкости в капиллярной трубке $h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$.
- Поверхностное натяжение $\sigma = \dfrac{F}{lb}$ или $\sigma = \dfrac{\Delta E}{\Delta S}$.

9. Специальная теория относительности

- Преобразования Галилея
$$x = x' + \upsilon t,\ y = y',\ z = z',\ t = t' \text{ или } \vec{r} = \vec{r}' + \vec{\upsilon} t.$$
- Закон сложения скоростей в классической механике $u = \upsilon' + \upsilon$.
- Преобразования Лоренца
$$x = \frac{x' + \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}};\ y = y';\ z = z';\ t = \frac{t' + \frac{\upsilon x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$
- Интервал времени между событиями $\Delta t' = \dfrac{\upsilon(x_1 - x_2)}{c^2\sqrt{1-\upsilon/c^2}}$.
- Релятивистское (Лоренцево) сокращение длины стержня $l = l_0\sqrt{1-\upsilon/c^2}$
- Релятивистское замедление хода часов $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$
- Релятивистский закон сложения скоростей $u = \dfrac{\upsilon' + \upsilon}{1 + \dfrac{\upsilon'\upsilon}{c^2}}$.
- Релятивистское выражение для импульса $\vec{p} = \dfrac{m\vec{u}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$.
- Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы
$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}.$$
- Релятивистское выражение для энергии $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$.

- Кинетическая энергия релятивистской частицы

$$K = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} - 1\right).$$

- Закон взаимосвязи массы и энергии $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\upsilon/c)^2}}$.
- Энергия покоя $E_0 = mc^2$.
- Взаимосвязь массы и энергии покоя $\Delta E_0 = \Delta mc^2$.
- Масса образовавшейся частицы $M = \dfrac{2m}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} > 2m$.
- Энергия связи $E_{св} = c^2 \Delta M$.
- Дефект массы $\Delta M = \sum m_i - M$.
- Условие существования черной дыры $m_\gamma c^2 \le \gamma \dfrac{m_\gamma M}{r_g}$
- Размеры черной дыры $r_g \le \gamma \dfrac{M}{c^2}$.

Истинный джентльмен – это тот,
кто кошку всегда называет кошкой.
Даже если он споткнулся о неё и упал

ГЛОССАРИЙ

В глоссарии перечислены использованные в пособии термины физики, математики, синергетики, которые часто непереводимы напрямую. Их число быстро растет и неконтролируемо «размножается». Даны их выверенные толкования без претензий на истину в абсолютной инстанции.

Адаптация (лат. *adaptio* – *приспособление*) – приспособление функций и строения системы к условиям существования.

Адроны (греч. *adros* – сильный) – элементарные частицы, участвующие в сильном взаимодействии (барионы и мезоны, включая все резонансы).

Аккреция (лат. *accretio* – приращение, увеличение) – гравитационный захват вещества и последующее его падение на космическое тело (например, звезду).

Анизотропия (греч. *anisos* – неравный и *tropos* – свойство) – зависимость свойств среды от направления. Она характерна, например, для механических, оптических, магнитных, электрических и других свойств кристаллов.

Аннигиляция (лат. *annihilation* – превращение в ничто, уничтожение) – превращение элементарных частиц и античастиц в другие частицы, число и вид которых определяются законами сохранения (например, при аннигиляции пары электрон-позитрон образуются фотоны).

Античастицы – элементарные частицы, имеющие ту же массу, спин, время жизни и некоторые другие внутренние характеристики, что и их «двойники», но отличающиеся от них знаками электрического заряда и магнитного момента, барионного заряда, странности и др.

Вес тела – сила, с которой любое тело, находящееся в поле сил тяжести (как правило, создаваемое каким-либо небесным телом, например Землёй, Солнцем и т. д.), действует на опору или подвес, которые препятствуют свободному падению тела. В частном случае, когда опора (подвес) покоится или равномерно и прямолинейно движется относительно инерциальной системы отсчёта, вес тела P по величине и направлению совпадает с силой тяжести mg: $P = mg$, где m – масса тела, g – ускорение свободного падения. Вес и сила тяжести приложены к разным объектам (вес – к опоре или подвесу, сила тяжести – к телу) и имеют различную физическую природу (соответственно, вес – упругую, то есть по существу электромагнитную, а сила тяжести – гравитационную).

Взаимодействие – воздействие тел или частиц друг на друга, приводящее к изменению состояния их движения.

В механике Ньютона взаимное действие тел друг на друга характеризуется силой. Более общей характеристикой взаимодействия является потенциальная энергия. В современной физике утвердилась новая концепция – близкодействия, которая распространена на любые взаимодействия. Согласно этой концепции, взаимодействие между телами осуществляется посредством тех или иных полей, непрерывно распределённых в пространстве. Так, всемирное тяготение осуществляется гравитационным полем.

Внесистемные единицы – единицы физических величин, не входящие ни в одну из существующих систем единиц, а также не входящие в СИ, но допускаемые к применению наравне с единицами этой системы. Внесистемные единицы можно разделить на независимые (определяемые без помощи других единиц, например градус Цельсия) и произвольно выбранные, но выражаемые некоторым числом других единиц (например атмосфера, лошадиная сила, световой год, парсек).

Внутреннее трение – свойство твёрдых тел необратимо превращать в теплоту механическую энергию, сообщённую телу в процессах его деформирования, сопровождающихся нарушением в нём термодинамического равновесия.

Время жизни – время, в течение которого вероятность обнаружить систему в данном состоянии уменьшается в e раз.

Время релаксации – характеристика процесса установления равновесия термодинамического в макроскопической физической системе.

Вселенная – весь существующий материальный мир. Вселенная, изучаемая астрономией, – часть материального мира, которая доступна наблюдениям астрономическими средствами; эту часть Вселенной часто называют Метагалактикой.

Галактики (греч. *galaktikos* – млечный) – гигантские (до сотен млрд звезд) звездные системы; к ним относится и наша Галактика, включающая Солнечную систему. Галактики подразделяются на эллиптические (E), спиральные (S) и неправильные (Ir). Ближайшие к нам галактики – Магеллановы Облака (Ir) и Туманность Андромеды (S).

Галилея принцип относительности – требование независимости законов классической (нерелятивистской) механики от выбора инерциальной системы отсчёта (ИСО), понимаемое как инвариантность уравнений механики относительно преобразований Галилея, т. е. преобразований координат и времени движущейся материальной точки при переходе от одной ИСО к другой.

Гипотеза – научное предположение, выдвигаемое в форме научных понятий с целью восполнить пробелы эмпирического познания или связать различные эмпирические знания в единое целое либо выдвигаемое для объяснения какого-либо явления, фактов и требующее проверки на опыте и теоретического обоснования, для того чтобы стать достоверной научной теорией.

Гироскоп – быстровращающееся симметричное твёрдое тело, ось вращения (ось симметрии) которого может изменять своё направление в пространстве. Свойствами гироскопа обладают вращающиеся небесные тела, артиллерийские снаряды, роторы турбин, устанавливаемых на судах, винты самолётов и т. п.

Гравитация (лат. *gravitas* – тяжесть) – тяготение, универсальное взаимодействие между любыми видами физической материи.

Гравитон – квант гравитационного поля, имеющий нулевую массу покоя, нулевые электрический заряд и спин (экспериментально пока не обнаружен).

Детерминизм (лат. *determine* – определяю) – философское учение об объективной закономерности взаимосвязи и причинной обусловленности всех явлений, противостоит индетерминизму, отрицающему всеобщий характер причинности.

Деформация (лат. *deformation* – искажение) – 1) изменение положения точек твердого тела, при котором меняется расстояние между ними в результате внешнего воздействия; 2) изменение формы, искажение сущности чего-либо (например, деформация социальной структуры).

Деформация пластическая – изменение взаимного расположения множества частиц материальной среды, которое сохраняется при снятии напряжений и сопровождается рассеянием энергии. Величина её зависит не только от значений приложенных сил, но и от предшествующей истории их изменения.

Деформация упругая – изменение взаимного расположения множества частиц материальной среды, которое возникает и исчезает одновременно с нагрузкой и не сопровождается рассеянием энергии.

В кристаллах упругая деформация проявляется в изменении расстояний между узлами и перекосе кристаллической решётки без изменения порядка расположения атомов. Первоначальная конфигурация восстанавливается при снятии нагрузки.

Динамика – раздел механики, посвящённый изучению движения материальных тел под действием приложенных к ним сил. Движения любых материальных тел (кроме микрочастиц), происходящие со скоростями, не близкими к скорости света, изучаются в классической динамике. Движение тел, перемещающихся со скоростями, приближающимися к скорости света, рассматривается в теории относительности.

Дискретный (лат. *discretus* – раздельный) – прерывистый, состоящий из отдельных частей.

Диссипация (лат. *dissipatio* – рассеяние) – улетучивание газов земной атмосферы в межпланетное пространство; диссипация энергии – переход части энергии упорядоченных процессов (кинетической энергии движущегося тела, энергии электрического тока и т. д.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном итоге – в тепло.

Диссоциация (лат. *dissociatio* – разъединение) – распад частицы (молекулы, радикала, иона) на несколько более простых частиц.

Единицы физических величин – конкретные физические величины, которым по определению присвоены числовые значения, равные единице.

Жесткость – способность тела или конструкции сопротивляться образованию деформаций. Если материал подчиняется Гука закону, то характеристикой жесткости являются модули упругости E – при растяжении, сжатии, изгибе и G – при сдвиге.

Закон сохранения момента импульса – физический закон, в соответствии с которым момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной точки не изменяется со временем. Закон сохранения момента импульса есть проявление изотропности пространства.

Запас прочности – характеристика состояния сооружения или его элемента в отношении сопротивления их разрушению.

Иерархия (греч. *hieros* – священный и *arche* – власть) – расположение частей или элементов целого в порядке от высшего к низшему.

Изотропность (греч. *tropos* – свойство) – одинаковость свойств объектов (пространства, вещества и др.) по всем направлениям.

Импульс – мера механического движения, представляющая собой векторную величину, равную для материальной точки произведению массы этой точки на её скорость v и направленную так же, как вектор скорости. Импульс точки остаётся постоянным только при отсутствии сил. Под действием силы импульс точки изменяется в общем случае и по численной величине и по направлению.

Импульс силы – величина, характеризующая действие, которое оказывает на тело сила за некоторый промежуток времени; равна произведению среднего значения этой силы на время её действия.

Инвариант (франц. *invariant* – неизменяющийся от лат. *invariabilis*) – величина, остающаяся неизменной при тех или иных преобразованиях.

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учёта их массы и действующих на них сил. Исходными в кинематике являются понятия пространства и времени.

Корпускула (лат. *corpusculum* – частица) – частица в классической (неквантовой) физике.

Мезоны – нестабильные элементарные частицы с нулевым или целым спином, принадлежащие к классу адронов.

Момент импульса – мера механического движения тела или системы тел относительно какой-либо точки (центра) или оси. Момент импульса равен векторному произведению импульса тела на плечо этого импульса относительно оси.

Парсек (сокр. от *параллакс* и *секунда*) – единица длины, применяемая в астрономии, равна 3,26 световых года ($3{,}09 \cdot 10^{16}$ м).

Поле физическое – пространство, в котором можно обнаружить какие-либо физические воздействия, употребляют термин поле, и в других науках или сферах деятельности: поле чувств, поле восприятия, поле зрения, поле напряжений, поле алгебраическое, например поле комплексных чисел и т. д.

Потенциальная энергия – часть механической энергии тела, зависящая от взаимного расположения его частей во внешнем силовом поле. Изменение потенциальной энергии равно совершенной работе.

Работа – мера действия силы, зависящая от её модуля и направления и от перемещения точки приложения силы. Если сила постоянна по модулю и направлению, а перемещение прямолинейно, то работа определяется равенством $A = F s \cos \alpha$, где α – угол между направлениями силы и перемещения.

Рациональный (лат. *rationalis* – разумный) – разумный, целесообразный, обоснованный.

Редукционизм – сведение сложного к простому, составного к элементарному.

Сингулярность – область пространства с необычными, предельными свойствами по большинству физических параметров. Согласно модели «Большого взрыва» начало Вселенной произошло из сингулярной области, сингулярности.

Синтез (греч. *synthesis* – соединение, сочетание) – соединение (мысленное или реальное) различных элементов объекта в единое целое.

Спин (англ. *spin* – вращение) – собственный момент импульса микрочастицы, имеющий квантовую природу.

Твердое тело – агрегатное состояние вещества, характеризующееся стабильностью формы и характером теплового движения атомов, которые совершают малые колебания около положений равновесия.

Термоядерная реакция – реакция слияния (синтеза) легких ядер в более тяжелые, происходящая при температурах выше 10 млн градусов. Играют исключительно высокую роль в звездах, как источник энергии.

Удельный вес – отношение веса тела *P* к его объёму.

Удельный объём – объем занимаемый единицей массы вещества; величина, обратная плотности.

Унифицировать (лат. *unio* – единство и *facere* –делать) – приводить к единой норме, к единообразию.

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства и законы движения окружающих нас объектов материального мира. Вследствие этой общности не существует явлений природы, не имеющих физических свойств или сторон. Понятия физики и её законы лежат в основе всего естествознания.

Флуктуация (лат. – *fluctuatio* – колебание) – случайное отклонение физических величин от их средних значений.

Хаббла закон – пропорциональность скорости удаления внегалактического объекта расстоянию до него.

Центр инерции – геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в теле или механической системе.

Центральная сила – приложенная к материальному телу сила, линия действия которой при любом положении тела проходит через некоторую определенную точку, называемую центром силы. Примеры центральных сил – сила тяготения, направленная к центру планеты, кулоновы силы электростатического притяжения или отталкивания точечных зарядов и другие.

Черные дыра – космические объекты, образующиеся при сжатии систем, массы которых превышает величину 2,5 масс Солнца. В таком случае нет сил, которые могли бы удержать вещество от гравитационного коллапса – неограниченного сжатия в бесконечно малый объем.

Черные дыры могут быть образованы при взрывах сверхновых звезд или на начальной стадии эволюции вселенной. В центрах многих галактик предполагается наличие черных дыр с массами в миллионы масс Солнца. Гравитационное поле Черных дыр удерживает, как в ловушке, все излучения, однако можно обнаружить их по излучению газа и пыли, формирующих вокруг таких объектов вращающуюся воронку или диск падения вещества в бездонный колодец.

ПЕРСОНАЛИИ

1. **Иоффе Абрам Фёдорович (1880–1960)** – российский, советский физик, обыкновенно именуемый «отцом советской физики», академик, вице-президент АН СССР, создатель научной школы, давшей многих выдающихся советских физиков.

2. **Николай Коперник** (1473–1543) – польский астроном, математик, экономист, каноник. Наиболее известен как автор средневековой гелиоцентрической системы мира, положившей начало первой научной революции.

3. **Леверье Урбен** (1811–1877) – французский математик, занимавшийся небесной механикой. Большую часть своей жизни проработал в Парижской обсерватории. Наиболее известным достижением является предсказание существования планеты Нептун, сделанное с помощью математического анализа астрономических наблюдений.

4. **Томбо Клайд Уильям (**1906–1997**)** – американский астроном, открывший большое число астероидов, в том числе Плутон в 1930 г.

5. **Фейнман Ричард Филлипс** (1918–1988) – выдающийся американский физик. Один из создателей квантовой электродинамики. Входил в число разработчиков атомной бомбы. Предложил партонную модель нуклона, теорию квантованных вихрей. Лауреат Нобелевской премии по физике.

6. **Эрстед Ханс Христиан** (1777–1851) – датский учёный-физик, исследователь явлений электромагнетизма.

7. **Ампер Андре-Мари** (1775–1836) – знаменитый французский физик, математик, естествоиспытатель. Член многих академий наук, в частности Петербургской и Парижской академий наук.

8. **Фарадей Майкл** (1791–1867) – английский физик, химик, основоположник учения об электромагнитном поле, член Лондонского королевского общества.

9. **Максвелл Джеймс Клерк (**Кларк) (1831, Эдинбург – 1879**)** – британский физик. Описал термодинамический парадокс. Создал теорию электро-магнитных волн.

10. **Ангстрем Андерс Йонас (**1814–1874**)** – шведский ученый-астрофизик, один из основателей спектрального анализа.

11. **Планк Макс Карл Эрнст Людвиг** (1858–1947) – выдающийся немецкий физик. Как основатель квантовой теории предопределил основное направление развития физики с начала XX века.

12. **Архимед (**287 до н.э. – 212 до н.э.) – древнегреческий математик, физик, механик и инженер из Сиракуз. Сделал множество открытий в геометрии. Заложил основы механики, гидростатики, автор ряда важных изобретений.

13. **Пифагор Самосский** (570–490 до н. э.) – древнегреческий философ и математик.

14. **Готфрид Вильгельм фон Лейбниц** (1646–1716) – немецкий философ, математик, юрист, дипломат. Ввёл понятие «живой силы» (кинетической энергии).

15. **Томсон Уильям (лорд Кельвин)** (1824–1907) – один из величайших физиков, один из основателей термодинамики.

16. **Юнг Томас** (1773–1829) – английский физик, врач, астроном и востоковед, один из создателей волновой теории света.

17. **Пуассон Симеон Дени** (1781–1840) – знаменитый французский физик и математик.

18. **Гаспар-Гюстав де Кориолис** (1792–1843) – французский математик, физик, инженер. Больше всего известен работой, посвящённой изучению эффекта, названного эффектом Кориолиса, теоремой об ускорениях в абсолютном и относительном движениях, называемой теоремой Кориолиса.

19. **Фуко Жан Бернар Леон** (1819–1868) – французский физик и астроном, член Парижской АН. Известен прежде всего как создатель маятника, названного маятником Фуко.

20. **Гамильтон Уильям Роуан** (1805–1865) – ирландский математик и физик, член Ирландской АН. Физические исследования в области оптики и механики. Разработал теорию оптических явлений («математическую оптику»).

21. **Мещерский Иван Всеволодович** (1859–1935) – российский учёный, основоположник механики тел переменной массы. Его труды стали научной основой для решения многих проблем реактивной техники, небесной механики.

22. **Циолковский Константин Эдуардович** (1857–1935) – российский, советский учёный-самоучка, школьный учитель. Основоположник современной космонавтики. Обосновал вывод уравнения реактивного движения, пришёл к выводу о необходимости использования «ракетных поездов» – прототипов многоступенчатых ракет.

23. **Якоб Штейнер** (1796–1863) – немецкий математик, основатель синтетической геометрии кривых линий и поверхностей 2-го и высших порядков.

24. **Жуковский Николай Егорович** (1847–1921) – выдающийся русский учёный, создатель аэродинамики как науки.

25. **Ву Цзяньсюн** (1912–1997) – американский радиофизик китайского происхождения. Поставила знаменитый «эксперимент Ву», доказавший несохранение пространственной чётности в слабых взаимодействиях.

26. **Ледерман Леон Макс** (1922) – американский физик, лауреат премии Вольфа по физике, лауреат Нобелевской премии по физике «за метод нейтринного луча и доказательство двойственной структуры лептонов посредством открытия мюонного нейтрино».

27. **Кеплер Иоганн** (1571–1630) – немецкий математик, астроном, оптик и астролог. Открыл законы движения планет.

28. **Кавендиш Генри** (1731–1810) – знаменитый британский физик и химик, член Лондонского королевского общества.

29. **Этвеш Лоранд барон фон** (1848–1919) – венгерский физик. Сформулировал зависимость силы поверхностного натяжения от температуры.

30. **Дикке Роберт** (1916) – американский физик. Работы в области теории относительности, гравитации, космологии, астрофизики, атомной спектроскопии, квантовой физики, радиофизики, квантовой электроники.

31. **Птолемей Клавдий** (87–165) – древнегреческий астроном, математик, оптик, теоретик музыки и географ.

32. **Джордано Бруно** (1548–1600) – итальянский монах-доминиканец, философ и поэт, представитель пантеизма.

33. **Тихо Браге** (1546 – 1601) – датский астроном, астролог и алхимик эпохи Возрождения. Первым в Европе начал проводить систематические и высокоточные астрономические наблюдения.

34. **Лаплас Пьер-Симон** (1749–1827) – французский математик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей.

35. **Паскаль Блез** (1623–1662) – французский математик, физик, литератор и философ; автор основного закона гидростатики.

36. **Бернулли Даниил** (1700–1782) – выдающийся швейцарский физик-универсал и математик, один из создателей кинетической теории газов, гидродинамики и математической физики.

37. **Пито Анри** (1695–1771) – французский математик, инженер-гидравлик. Изобрел приспособление для измерения скорости течения воды (трубка Пито).

38. **Рейнольдс Осборн** (1842–1912) – английский инженер и физик, специалист в области гидравлики.

39. **Герон Александрийский** (10–75) – греческий математик и механик. Герон считается величайшим инженером за всю историю человечества. Он практически вплотную подобрался к индустриальной революции, которая произошла только через приблизительно 2000 лет.

40. **Герц Генрих Рудольф** (1857–1894) – немецкий физик. Экспериментально подтвердил электромагнитную теорию света Джеймса Максвелла.

41. **Рёмер Оле Кристенсен** (1644, Орхус – 1710) – датский астроном, первым измеривший скорость света.

42. **Морли Эдвард Уильямс** (1839–1923) – американский физик. Наибольшую известность получили его работы в области интерферометрии, выполненные совместно с Майкельсоном.

43. **Таунс Чарлз Хард** (1915) – американский физик, лауреат Нобелевской премии по физике. Член Национальной академии наук США, иностранный член РАН.

44. **Лоренц Хендрик Антон** (1853–1928) – выдающийся голландский физик. Развил электромагнитную теорию света и электронную теорию материи.

45. **Фитцджеральд Джордж Френсис** (1851–1901) – английский физик. Последователь Максвелла, разрабатывал теорию электрических и магнитных явлений.

46. **Джозеф Лармор** (1857–1942) – ирландский физик и математик. С 1903 по 1932 профессор на кафедре математики Кембриджского университета. Он опубликовал теорию, позже названную теорией преобразования Лоренца, за два года до Лоренца и за восемь лет до Эйнштейна.

47. **Пуанкаре Жюль Анри** (1854–1912) – выдающийся французский математик, физик, философ и теоретик науки; глава Парижской академии наук, член Французской академии.

48. **Мёссбауэр Рудольф Людвиг** (1929) – немецкий физик, специалист в физике атомного ядра и элементарных частиц, лауреат Нобелевской премии по физике.

49. **Хафеле Дж.** – американский ученый. В 1971 году совместно с Ричардом Китингом провел эксперимент (эксперимент Хафеле – Китинга), ставший одним из тестов теории относительности, непосредственно продемонстрировавшим реальность парадокса близнецов.

50. **Китинг Ричард** – американский ученый.

51. **Минковский Герман** (1864–1909) – немецкий математик, из литовских евреев, который использовал геометрические методы для решения сложных проблем в области теории чисел, математической физики и теории относительности.

52. **Риман Георг Фридрих Бернхард** (1826–1866) – немецкий математик. За свою короткую жизнь (всего 10 лет трудов) он преобразовал сразу несколько разделов математики.

53. **Лобачевский Николай Иванович** (1792–1856) – великий русский математик, создатель геометрии – Лобачевского, деятель университетского образования и народного просвещения.

54. **Шварцшильд Карл** (1873–1916) – немецкий астроном и физик.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения фундаментальных констант

Гравитационная постоянная	$G = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ м/с
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12{,}5663706144 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e = 1836{,}15152$
Элементарный заряд	$e^- = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл
Отношение заряда электрона к его массе	$e^-/m_e = 1{,}7588047 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Атомная единица массы	1 а.е.м. $= 1{,}6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Ускорение свободного падения на уровне моря и широте 45°	$g = 9{,}80665$ м/с²
Нормальное атмосферное давление	$P_0 = 1{,}013 \cdot 10^{5}$ Н/м²
Постоянная Ридберга	$R = 10\,967\,758$ м$^{-1}$

Упругие постоянные. Предел прочности

Материал	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа	Коэффициент Пуассона μ	Предел прочности на разрыв, σ_m, ГПа	Сжимаемость β, ГПа$^{-1}$
Алюминий	70	26	0,34	0,10	0,014
Медь	130	40	0,34	0,30	0,007
Свинец	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Сталь (железо)	200	81	0,29	0,60	0,006
Стекло	60	30	0,25	0,05	0,025
Вода	–	–	–	–	0,49

Скорость звука в различных средах

Среда	t,°С	υ, м/с	Среда	t,°С	υ, м/с
Воздух	0	331	Ртуть	20	1451
Азот	0	334	Спирт метиловый	20	1123
Аммиак	0	415	Алюминий	20	5080
Водород	0	1284	Медь	20	3710
Гелий	0	965	Железо	20	5170
Кислород	0	316	Стекло кварцевое	20	5370
Углек. газ	0	259	Дерево ель	0	4800
Ацетон	20	1192	Дерево пробковое	–	430–530
Вода пресная	25	1497	Каучук	–	50
Вода морская	17	1510–1550			

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение
$1\,000\,000\,000\,000=10^{12}$	тера	Т
$1\,000\,000\,000=10^{9}$	гига	Г
$1\,000\,000=10^{6}$	мега	М
$1\,000=10^{3}$	кило	к
$100=10^{2}$	гекто	г
$10=10^{1}$	дека	да
$0{,}1=10^{-1}$	деци	д
$0{,}01=10^{-2}$	санти	с
$0{,}001=10^{-3}$	милли	м
$0{,}000001=10^{-6}$	микро	мк
$0{,}000000001=10^{-9}$	нано	н
$0{,}000000000001=10^{-12}$	пико	п
$0{,}000000000000001=10^{-15}$	фемто	ф
$0{,}000000000000000001=10^{-18}$	атто	а

Внесистемные единицы измерений
и их перевод в единицы ***СИ***

Единица	Обозначение	Перевод в единицы СИ
микрон	мкм	$1 \cdot 10^{-6}$ м
ангстрем	Å	$1 \cdot 10^{-10}$ м
световой год	св. год	$9{,}46 \cdot 10^{15}$ м
парсек	пк	$3{,}09 \cdot 10^{16}$ м
литр	л	$1 \cdot 10^{-3}$ м^3
атомная единица массы	а.е.м.	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
тонна	т	1000 кг
минута	мин	60 с
час	ч	3600 с
сутки	сут	86400 с
секунда	″	$4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад
минута	′	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$ рад
градус	°	0,017 рад
оборот	об	6,28 рад
полный телесный угол	–	12,57 ср
оборот в секунду	об/с	1 с$^{-1}$
оборот в минуту	об/мин	0,0167 с$^{-1}$
километр в час	км/ч	0,278 м/с
оборот в секунду	об/с	6,28 рад/с
оборот в минуту	об/мин	0,105 рад/с
миллиметр ртутного столба	мм. рт. ст.	133 Па
бар	бар	$1 \cdot 10^{5}$ Па
киловатт-час	кВт · ч	$3{,}6 \cdot 10^{6}$ Дж
электрон-вольт	эВ	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
ампер-час	А · ч	$3{,}6 \cdot 10^{3}$ Кл
калория	кал	$4{,}19 \cdot 10^{0}$ Дж
рентген	Р	$2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг
рад	рад	0,01 Дж/кг
кюри	Ки	$3{,}7 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$
распад в секунду	расп./с	1 с$^{-1}$

Астрономические постоянные

Радиус Земли	$6{,}378164 \cdot 10^{6}$ м
Средняя плотность Земли	$5{,}518 \cdot 10^{3}$ кг/м^{3}
Масса Земли	$5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}9599 \cdot 10^{8}$ м
Средняя плотность Солнца	$1{,}41 \cdot 10^{3}$ кг/м^{3}
Масса Солнца	$1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}737 \cdot 10^{6}$ м
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3{,}844 \cdot 10^{8}$ м
Среднее расстояние до Солнца (астрономическая единица)	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин

Производные единицы СИ,
имеющие собственные наименования

Величина	Единица		Выражение производной единицы	
	Наименование	Обозначение	Через другие единицы СИ	Через основные единицы СИ
Частота	герц	Гц		с$^{-1}$
Сила	ньютон	Н		м·кг·с$^{-2}$
Давление	паскаль	Па	Н/м^{2}	м$^{-1}$·кг·с$^{-2}$
Энергия, работа, кол-во теплоты	джоуль	Дж	Н/м	м^{2}·кг·с$^{-2}$
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	Дж/с	м^{2}·кг·с$^{-3}$
Освещенность	люкс	лк		м$^{-2}$·кд·ср

НОВЫЕ ИЗДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИЗИКА» И СМЕЖНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ

1. *Абушкин, Х. Х.* Методика проблемного обучения физике : учеб. пособие для СПО / Х. Х. Абушкин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
2. *Айзенцон, А. Е.* Физика : учебник и практикум для СПО / А. Е. Айзенцон. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
3. *Ахметзянов, М. Х.* Техническая механика (сопротивление материалов) : учебник для СПО / М. Х. Ахметзянов, И. Б. Лазарев. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
4. *Бабецкий, В. И.* Механика : учеб. пособие для СПО / В. И. Бабецкий, О. Н. Третьякова. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
5. *Бабецкий, В. И.* Механика в примерах и задачах : учеб. пособие для СПО / В. И. Бабецкий, О. Н. Третьякова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
6. *Бабецкий, В. И.* Физика. Механика. Электромагнетизм : учеб. пособие для СПО / В. И. Бабецкий, О. Н. Третьякова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
7. *Бордовский, Г. А.* Общая физика. В 2 т.: учеб. пособие для СПО / Г. А. Бордовский, Э. В. Бурсиан. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
8. *Бухарова, Г. Д.* Физика. Молекулярная физика и термодинамика. Методика преподавания : учеб. пособие для СПО / Г. Д. Бухарова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
9. *Бухарова, Г. Д.* Физика. Электричество и магнетизм. Методика преподавания : учеб. пособие для СПО / Г. Д. Бухарова. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
10. *Васильев, А. А.* Физика : учеб. пособие для СПО / А. А. Васильев, В. Е. Федоров, Л. Д. Храмов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
11. Волновая оптика : учеб. пособие для СПО / А. В. Михельсон, Т. И. Папушина, А. А. Повзнер, А. Г. Гофман ; под общ. ред. А. А. Повзнера. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
12. *Горлач, В. В.* Физика : учеб. пособие для СПО / В. В. Горлач. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
13. *Горлач, В. В.* Физика. Самостоятельная работа студента : учеб. пособие для СПО / В. В. Горлач, Н. А. Иванов, М. В. Пластинина. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
14. *Горлач, В. В.* Физика: квантовая физика. Лабораторный практикум : учеб. пособие для СПО / В. В. Горлач. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

15. *Горячев, Б. В.* Общая физика. Оптика. Практические занятия : учеб. пособие для СПО / Б. В. Горячев, С. Б. Могильницкий. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
16. *Гулиа, Н. В.* Физика. Парадоксальная механика : учеб. пособие для СПО / Н. В. Гулиа. — 2-е изд., доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
17. *Давыдков, В. В.* Физика: механика, электричество и магнетизм : учеб. пособие для СПО / В. В. Давыдков. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
18. *Зотеев, А. В.* Общая физика: лабораторные задачи : учеб. пособие для СПО / А. В. Зотеев, В. Б. Зайцев, С. Д. Алекперов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
19. *Йоос, Г.* Lehrbuch der Theoretischen Physik in 2 t. Теоретическая физика. В 2 ч. / Г. Йоос. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
20. *Калашников, Н. П.* Физика. В 2 ч.: учебник и практикум для СПО / Н. П. Калашников, С. Е. Муравьев. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
21. *Калашников, Н. П.* Физика. Графические методы решения задач : учеб. пособие для СПО / Н. П. Калашников, В. И. Кошкин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
22. *Кравченко, Н. Ю.* Физика : учебник и практикум для СПО / Н. Ю. Кравченко. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
23. *Крылов, Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики / Н. С. Крылов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
24. *Ломоносов, М. В.* Избранные произведения. Естественные науки и философия / М. В. Ломоносов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
25. *Ломоносов, М. В.* Об истории и литературе. Избранное / М. В. Ломоносов. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
26. *Мусин, Ю. Р.* Физика: колебания, оптика, квантовая физика : учеб. пособие для СПО / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
27. *Мусин, Ю. Р.* Физика: механика : учеб. пособие для СПО / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
28. *Мусин, Ю. Р.* Физика: механика сплошных сред, молекулярная физика и термодинамика : учеб. пособие для СПО / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
29. *Мусин, Ю. Р.* Физика: электричество и магнетизм : учеб. пособие для СПО / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
30. *Оселедчик, Ю. С.* Физика. Модульный курс : учеб. пособие для СПО / Ю. С. Оселедчик, П. И. Самойленко, Т. Н. Точилина. — М. : Издательство Юрайт, 2016.

31. *Прошкин, С. С.* Механика, термодинамика и молекулярная физика. Сборник задач : учеб. пособие для СПО / С. С. Прошкин, В. А. Самолетов, Н. В. Нименский. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
32. *Прошкин, С. С.* Механика. Сборник задач : учеб. пособие для СПО / С. С. Прошкин, В. А. Самолетов, Н. В. Нименский. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
33. *Родионов, В. Н.* Физика : учеб. пособие для СПО / В. Н. Родионов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018.
34. *Сухнов, И. И.* Основы оптики. Теория изображения : учеб. пособие для СПО / И. И. Сухнов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
35. *Трофимова, Т. И.* Руководство к решению задач по физике : учеб. пособие для СПО / Т. И. Трофимова. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
36. Физика. Словарь-справочник. В 2 ч. : справочник для СПО / Е. С. Платунов, В. А. Самолетов, С. Е. Буравой, С. С. Прошкин. — 2-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2017.
37. Физика: колебания и волны. Лабораторный практикум : учеб. пособие для СПО / В. В. Горлач, Н. А. Иванов, М. В. Пластинина, А. С. Рубан ; под ред. В. В. Горлача. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017.

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: red@urait.ru

Новые издания и дополнительные материалы доступны
в электронной библиотечной системе «Юрайт»
biblio-online.ru

Учебное издание

Склярова Елена Александровна,
Кузнецов Сергей Иванович,
Кулюкина Евгения Сергеевна,

ФИЗИКА. МЕХАНИКА

Учебное пособие для СПО

Формат $60\times90\,^1/_{16}$.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 15,69.

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru