

Профессиональное
образование

М. И. Башмаков

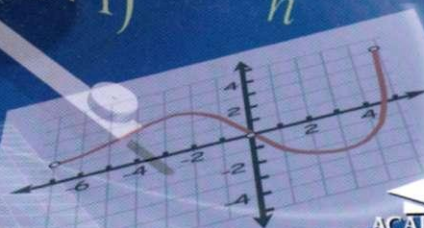
Учебное
пособие

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПРОФИЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

Общеобразовательные дисциплины

$$u_{n+1} = \frac{-(n^2 - u^2)_n}{2n(2n+1)} \cdot u_n$$



ACADEMIA

51
533

М. И. БАШМАКОВ

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПРОФИЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

Рекомендовано
Федеральным государственным автономным учреждением
«Федеральный институт развития образования» (ФГАУ «ФИРО»)
в качестве учебного пособия для использования в учебном процессе
образовательных учреждений, реализующих программы
начального и среднего профессионального образования
Регистрационный номер рецензии 434 от 12 декабря 2011 г. ФГАУ «ФИРО»

2-е издание, исправленное

81096



Москва
Издательский центр «Академия»
2013

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я722
Б 336

Рецензенты:

преподаватель математики ГОУ СПО «Колледж автоматизации
и информационных технологий № 20» *Т. Г. Конопенко*;
преподаватель математики ГОУ СПО «Финансовый колледж № 35»,
канд. экон. наук *Н. А. Кослякова*;
методист, преподаватель математики высшей квалификационной категории
ГОУ СПО «Библиотечный колледж № 58» *Н. В. Пименова*;
методист Учебно-методического центра *О. М. Шведова*

Башмаков М. И. *96018*
Б 336 Математика. Сборник задач профильной направленности : учеб. пособие для учреждений нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. — 2-е изд., испр. — М. : Издательский центр «Академия», 2013. — 208 с.
ISBN 978-5-7695-9748-0

В пособии приведены задачи профильной направленности по математике. Прикладной характер задач обеспечен выбором небольшого числа наиболее значимых профессиональных ситуаций, для которых предлагается строить стандартные математические модели и проводить их исследование в рамках требований Государственного стандарта. В основе выбора моделей лежит анализ стилевых характеристик, свойственных различным приложениям математики.

Вместе с учебником «Математика» М. И. Башмакова, учебным пособием «Математика. Задачник» М. И. Башмакова и «Математика. Книга для преподавателя» М. И. Башмакова составляют учебно-методический комплект.

Для обучающихся в учреждениях начального и среднего профессионального образования.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я722

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым
способом без согласия правообладателя запрещается*

© Башмаков М. И., 2012
© Образовательно-издательский центр «Академия», 2012
ISBN 978-5-7695-9748-0 © Оформление. Издательский центр «Академия», 2012

Уважаемый читатель!

Учебное пособие является частью учебно-методического комплекта по общеобразовательной дисциплине «Математика».

Учебно-методический комплект по математике включает в себя основную и дополнительную литературу, предназначенную для изучения дисциплины в учреждениях начального и среднего профессионального образования.

В состав комплекта входит учебник, задачки для базового и профильного изучения математики, а также методические рекомендации для преподавателей.

В задачниках предложена полноценная система упражнений, достаточная как для аудиторной, так и самостоятельной работы, а также для обобщающего повторения материала и подготовки к ЕГЭ. Кроме того, предлагаемые задачки дают возможность знакомства с прикладными аспектами математических понятий, затрагивающими вопросы финансов, экономики, окружающей среды, применения информационной техники, формирования навыков проектной деятельности по построению математических моделей.

Материалы учебно-методического комплекта соответствуют требованиям Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования и учитывают профиль получаемого профессионального образования.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
ПОЛТАВСКИЙ КОЛЛЕДЖ
БИБЛИОТЕКА

81096

«Что такое математика?» — этот вопрос стоит в названии книги известного немецкого математика Рихарда Куранта. Данная книга адресована школьникам и несколько раз издавалась на русском языке. Косвенный ответ на поставленный вопрос содержится в другой знаменитой книге «Числа и фигуры» немецких математиков Радемахера и Теплица.

Учебно-методический комплект «Математика», «Математика. Задачник для базового уровня» и «Математика. Сборник задач профильной направленности» для обучающихся в учреждениях начального и среднего профессионального образования строится вокруг фундаментальных вопросов — что? как? зачем и почему? Если на вопрос *что?* отвечает, прежде всего, учебник математики, на вопрос *как?* — общий задачник, содержащий набор упражнений и задач, помогающих усвоить смысл основных математических понятий, то данный сборник задач профильной направленности помогает ответить на вопрос *зачем?*

«Нам не дано предугадать, как слово наше отзовется» — эти слова Федора Тютчева настраивают на мысль о том, что любому из нас трудно себе представить, какую роль сыграют математические знания в дальнейшей работе и жизни. Опыт свидетельствует о том, что научиться конкретным применениям математики, которые встречаются в профессиональной жизни, достаточно просто. Если ясно, что и как нужно применять, то несложно найти современные пути овладения математической техникой. Для этого необходимо заранее позаботиться о том, чтобы быть готовым к осознанию и восприятию тех целей, того «технического задания», которые поставит профессия и жизнь, а именно:

- ознакомиться с прикладными возможностями основных математических понятий;
- овладеть навыками работы в «стандартных» прикладных ситуациях;
- приобрести опыт длительной «проектной» работы по построению и использованию математических моделей.

Предлагаемый сборник задач дает материал по каждому из указанных направлений и состоит из двух частей. Часть I со-

держит задачи и упражнения прикладного характера по каждой из 12 глав учебника «Математика» М. И. Башмакова. Следует иметь в виду, что прикладная направленность этих задач состоит не в насыщении формулировок «производственным содержанием», а в выделении важнейших стилевых особенностей, которые встречаются в приложениях. Иногда эти приложения становятся просто внутриматематическими, например геометрия, которая испокон веков стоит ближе всего к применениям математики, требует переноса знаний из других разделов математики. Процесс этого переноса является важнейшим элементом подготовки к использованию математики, и получить такой опыт разумнее всего, оставаясь на первых порах внутри самой математики.

Часть II более сложна и включает ситуации и сюжеты, в исследовании которых открывается широкое поле деятельности — перевод ситуации на математический язык, постановка математической задачи, нахождение подходов к ее решению, обсуждение результатов и т. п. Такой путь овладения приложениями математики наиболее эффективен, однако имеет определенные трудности, связанные, прежде всего, с выбором сюжета.

Ситуации, которые можно назвать прикладными, профессиональными, производственными, требуют для своего описания информацию, находящуюся вне математики. Нецелесообразно (и трудно как для преподавателя, так и для обучающегося) включать специальные сюжеты, не знакомые в деталях каждому человеку. Традиционная математика использует несколько прикладных сюжетов, которые уже считаются частью самой математики и не требуют дополнительной работы по их осмыслению. К числу таких сюжетов можно отнести задачи на равномерное движение, сложение движений и их скоростей, задачи на производительность труда и проценты. В то же время изменение условий жизни требует включения в корпус математики ряда новых ситуаций. Это относится, прежде всего, к вопросам финансов и экономики, окружающей среды, использованию информационной техники. Такая работа требует времени и накопления опыта. Представленные в сборнике задач сюжеты не обязательно должны быть использованы и включены в календарный план. Выбор сюжета и объем работы с ним должны определяться профессиональной направленностью образовательного учреждения. Некоторые сюжеты могут потребовать дополнительной информации, которая может быть найдена с помощью современных средств, и умение искать эту информацию — также важная учебная задача.

ЧАСТЬ I Прикладные задачи по главам курса

Глава 1

Развитие понятия о числе

Основные направления приложений: ■ Пропорции ■ Проценты ■ Округление чисел ■ Оценки и погрешности ■ Приближенные вычисления

■ Пропорции

1. Известно, что пропорция $a : b = x : y$ верна при определенных a, b, x и y . Будет ли при этих же значениях a, b, x и y верна пропорция $b : a = y : x$?

2. Участок земли площадью 2 га поделен на части в пропорции 2 : 3. Укажите площади участков.

3. Один рабочий выполняет некоторую работу за m дней, другой ту же работу может выполнить за n дней. За сколько дней будет выполнена работа при совместной работе обоих рабочих?

4. Если печенье из большой коробки разложить в пакеты по 0,4 кг, то получится 50 пакетов. Сколько пакетов по 0,25 кг можно заполнить этим печеньем?

5. *Задача Беруни.* Если 10 дирхемов (ден. ед.) приносят доход 5 дирхемов за два месяца, какой доход принесут 8 дирхемов за три месяца?

6. Новое серебро (альпака) — это сплав никеля, цинка и меди в отношении 3 : 4 : 13. Сколько килограммов каждого металла нужно взять, чтобы получить 4 кг нового серебра?

7. На пиратском рынке бочка рома стоит 800 дублонов (ден. ед.), или 100 пиастров, а пистолет стоит 100 дублонов, или 250 дукатов. Сколько пиастров нужно заплатить за попугая, за которого просят 100 дукатов?

8. Прямоугольный кусок волшебной кожи («шагреневая кожа») исполняет любые желания своего владельца, но после каждого исполнения желания он уменьшается на половину своей длины и на одну треть ширины. После исполнения пяти желаний он имел площадь 12 см^2 , а после исполнения двух желаний его ширина была 9 см. Какой была длина куска волшебной кожи после исполнения первого желания?

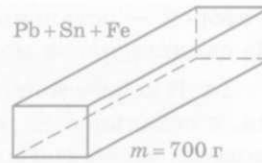


Рис. 1

9. Отец старше сына на 28 лет. Сейчас сыну 20 лет. Используя указанные данные, ответьте на следующие вопросы:

- каково отношение их возрастов;
- каким оно было 10 лет назад;
- каким оно будет через 12 лет;
- как меняется это отношение с возрастом?

10. Брусок изготовлен из сплава трех металлов — свинца, олова и железа (рис. 1). Масса бруска 700 г. Найдите массу каждого металла в бруске, имея следующие данные:

- отношение масс металлов 2 : 3 : 5;
- отношение масс свинца и олова 3 : 5, а железа в бруске вдвое больше (по массе), чем свинца и олова вместе;
- олова вдвое больше, чем свинца, а олова вместе с железом вдвое больше, чем свинца с оловом.

11. За 7 ч работы токарь должен был по норме изготовить некоторое количество деталей. Применяв изобретенный им новый резец, он стал за 1 ч изготавливать на 8 деталей больше, чем полагалось по норме, а потому за 6 ч работы выполнил 1,2 дневной нормы. Найдите производительность труда токаря за 1 ч с применением нового резца.

12. По плану токарь должен был ежедневно изготавливать 24 детали. Улучшив технологию производства деталей, он повысил дневную производительность труда на 15 деталей, за 6 дней до срока изготовил сверх плана 21 деталь. Определите, сколько деталей токарь изготовил к этому времени.

13. Два комбайна, работая совместно, убрали участок пшеницы за 16 ч. Если бы первый комбайн убрал $1/4$ часть всего участка,

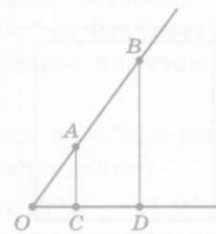


Рис. 2

а второй — остальное, то вся работа была бы выполнена за 42 ч. За сколько часов может убрать весь участок каждый комбайн?

14. В кофе с молоком на 180 г напитка приходится 15 г молока, а остальное — раствор черного кофе. Сколько нужно взять молока, чтобы оно содержалось в 300 г каши в той же пропорции, что и в кофе?

15. На рис. 2 $AC \parallel BD$; $OA = 1,5$; $AB = 2,5$; $OC = 1$; $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$.

Найдите OD .

■ Проценты

16. В один стакан чая обычно кладут 2 чайные ложки сахара и считают такой чай сладким. Масса чая в стакане 200 г, масса сахара в одной чайной ложке 10 г. Какова концентрация сахара в чае?

17. Верно ли, что если сначала увеличить количество на 8 %, а затем полученный результат уменьшить на 8 %, то получится исходное количество?

18. Сторону квадрата увеличили на 20 % (рис. 3). На сколько процентов увеличилась площадь квадрата? Периметр квадрата?

19. Токарь и его ученик должны были за смену изготовлять 130 деталей. Рабочий перевыполнил план на 10 %, а его ученик — на 20 %, и они вместе изготовили 148 деталей. Сколько деталей каждый из них должен был изготовлять до повышения производительности труда?

20. На сколько процентов число 32 меньше числа 40? На сколько процентов число 40 больше числа 32?

21. После двукратного повышения цены на 25 % стоимость банки сока составила 57 р. 50 к. Какова была ее исходная цена?

22. На кольцевой линии метро в одном направлении курсируют 24 состава с одинаковой скоростью и равными интервалами (рис. 4). Сколько составов надо добавить, чтобы при той же скорости движения уменьшить интервал на 20 %?

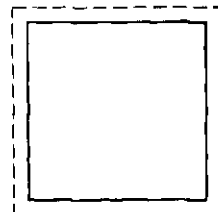
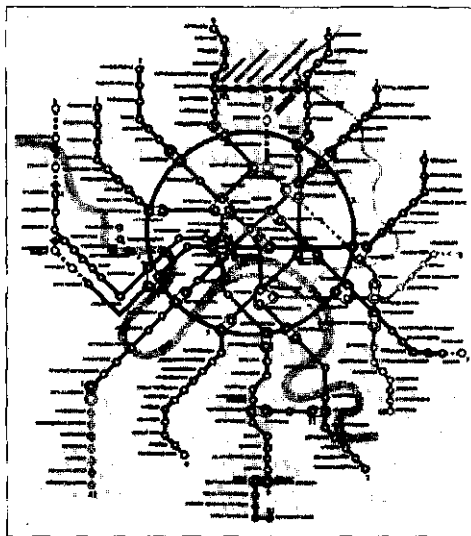


Рис. 3

23. Цена на сахар снизилась на 20 %. На сколько процентов больше сахара, чем раньше, можно купить теперь на 100 р.?

Рис. 4



24. При покупке товаров на дорожные чеки цена товара снижается на 20 %. Человек купил товар стоимостью 600 р., однако номинал чеков у него составлял лишь 400 р. Сколько пришлось доплатить за сделанную покупку?

25. «Средний размер назначенных пенсий в области равен 4 321 р. и увеличился за год на 38 %, составив 125 % к величине прожиточного минимума пенсионера (на конец прошлого года — 109 %)» (из газет). На сколько процентов больше товаров и услуг можно получить на повышенную пенсию?

26. «За последнюю неделю столичный квадратный метр жилья одновременно подешевел и подорожал. В долларах — в среднем подешевел на 1,6 %, в рублях — подорожал на 2,8 %» (из газет). Как изменился за это время курс доллара?

27. «Сменная норма у меня — 70 банок молока, а я делал 100. И если бы каждый на рабочем месте, — вспоминает ветеран, — делал на 30 % больше, то коммунизм построили бы» (из газет). Верна ли оценка ветераном своего усердия (т. е. верно ли, что он на 30 % перевыполнял план)?

28. «Налог на прибыль предприятий снизился на 4 %, с нынешних 24 до 20 %» (из газет). Верно ли это утверждение?

29. «Инфляция за последние годы: 2006 — 9 %, 2007 — 11,9 %, 2008 — 13,3 %» (из газет). На сколько процентов выросли цены за три указанных года?

30. «Средний размер пенсий увеличился за год на 17 %, а цены поднялись на 12 %» (из газет). На сколько процентов больше товаров и услуг можно получить на повышенную пенсию?

31. «С 1 января на треть вырастет квартплата. В частности, электричество подорожает на 27 %, газ — на 22,7 %, отопление — на 29,5 %, канализация — на 22,6 %» (из газет). Кроме этих услуг есть и прочие услуги, которые также подорожают. Оцените в процентах подорожание прочих услуг.

■ Округление чисел

32. Запишите следующие числа в виде периодических десятичных дробей и округлите их с точностью до 0,001:

1) $\frac{7}{25}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) $\frac{8}{15}$; 6) $\frac{41}{30}$.

33. Представьте данные числа x в виде десятичных дробей с указанной точностью округления h :

1) $x = 137,30849$ $h = 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$;

2) $x = 3,06527$ $h = 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$;

3) $x = 0,63009$ $h = 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$;

4) $x = \frac{2}{3}$ $h = 0,1; 0,01; 0,001$;

5) $x = \frac{15}{11}$ $h = 1; 0,1; 0,01; 0,001$;

6) $x = 5\frac{3}{14}$ $h = 1; 0,1; 0,001; 0,0001$.

34. Запишите число x в стандартном виде, округлив его мантиссу до 0,01:

1) $x = 635\,724$;

6) $x = 0,030267$;

2) $x = 0,0002695$;

7) $x = \frac{10\,000}{3}$;

3) $x = 12\,345\,678\,910$;

4) $x = 1,01^3$;

8) $x = \sqrt[3]{0,000000000343}$.

5) $x = 600,35$;

35. Запишите число в стандартном виде. Укажите его порядок и округлите его мантиссу до тысячных:

- | | | |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) 73 513; | 6) 501,6; | 11) $325\,694 \cdot 10^3$; |
| 2) 60,396; | 7) $357 \cdot 10^6$; | 12) 0,0004756; |
| 3) 0,5638; | 8) $1\,236 \cdot 10^{10}$; | 13) 0,0000008; |
| 4) 6 348 000; | 9) $0,0239 \cdot 10^{-3}$; | 14) 6,0031; |
| 5) $0,2^4 + 1$; | 10) $139,2 \cdot 10^{-3}$; | 15) 2 718,28. |

36. Найдите первые 20 цифр после запятой в десятичной записи следующих чисел:

- | | |
|----------------------------|---|
| 1) $\sqrt{1-(0,1)^{20}}$; | 3) $(5+\sqrt{26})^{20}$ |
| 2) $(5-\sqrt{26})^{20}$; | 4) $(\sqrt{1\,001}-\sqrt{1\,000})^{12}$. |

■ Оценки и погрешности

37. Известны оценки для переменных x и y : $0 < x < 5$, $2 < y < 3$. Дайте оценки *сверху* для следующих выражений:

- | | |
|--------------------|-------------------------|
| 1) $2x + 3y$; | 8) $x - y$; |
| 2) xy ; | 9) $3x - 2y$; |
| 3) $3x^2 + 2y^2$; | 10) $\frac{1}{x+1}$; |
| 4) $(x+2)(y-1)$; | 11) $\frac{y+2}{x+1}$; |
| 5) $\frac{1}{y}$; | 12) $\frac{1}{x}$. |
| 6) $\frac{x}{y}$; | |
| 7) $-y$; | |

38. Используя те же оценки для переменных x и y , что и в предыдущей задаче, дайте оценки *снизу* для следующих выражений:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| 1) $5x + 3y$; | 8) $\frac{y}{x}$; |
| 2) $-x$; | 9) $x^3 + y^3$; |
| 3) $y - x$; | 10) $\frac{y^2}{x+1}$; |
| 4) $x^2 - y^2$; | 11) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; |
| 5) $(x^2 + 1)(y^2 - 1)$; | 12) $(x - 1)y$. |
| 6) $3 - y$; | |
| 7) $\frac{1}{x}$; | |

39. Расстояние между двумя городами, измеренное по карте, равно $(24,6 \pm 2,0)$ см. Определите фактическое расстояние между ними и абсолютную погрешность, если масштаб карты 1:2 500 000.

40*. В каких границах лежит третья сторона треугольника, у которого две стороны: а) равны 4 и 5; б) каждая из них лежит в границах от 4 до 5; а в каких границах лежит его площадь?

41. Измерения пола классной комнаты таковы: $8,7 \pm 0,05$ м и $5,2 \pm 0,05$ м. В каких границах находится его: а) площадь; б) диагональ? Результат в п. «а» запишите с одним знаком после запятой.

42. Катеты прямоугольного треугольника равны 4 и 5 м. Вычислите его: а) периметр, округлив полученный результат до целого числа метров; б) радиус вписанной окружности, округлив полученный результат до целого числа дециметров.

43. Дан куб с ребром 1 м. С точностью до 1 дм (погрешностью в 1 дм) найдите длину ломаной, идущей по поверхности куба (рис. 5, а — е).

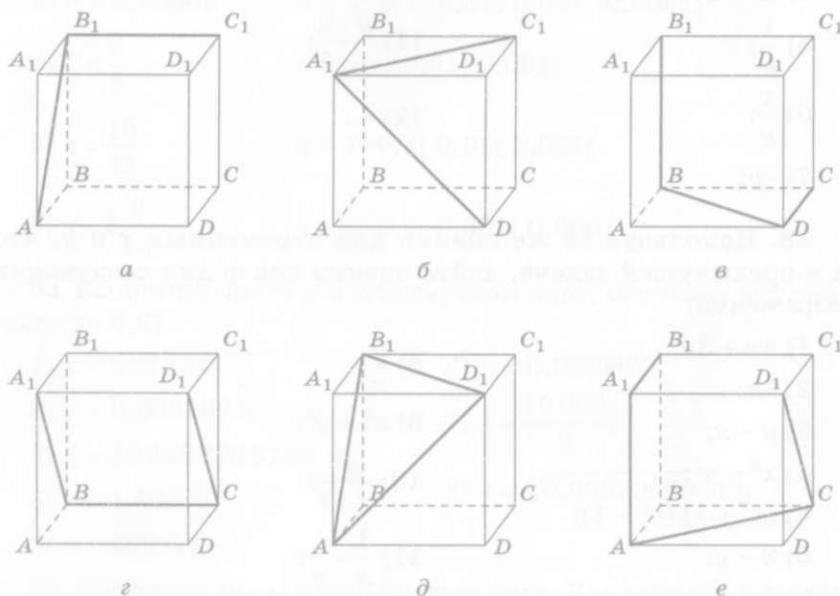


Рис. 5

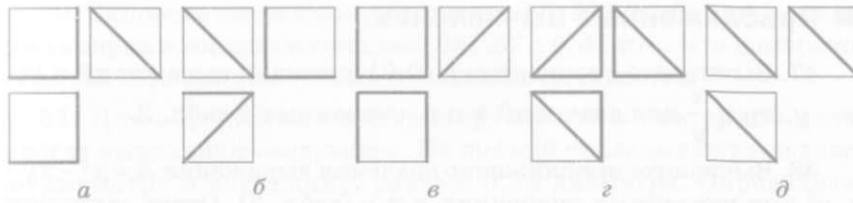


Рис. 6

44. На рис. 6, *a* — *д* изображены три проекции ломаной, каждое звено которой соединяет две вершины куба с ребром 1 м. Какова длина этой ломаной с точностью до 1 дм?

45. Найдите относительную погрешность (в процентах) следующих вычислений (проценты вычислить с точностью до 0,1):

- 1) $A = 100 \pm 1$;
- 2) $R = 6\,380 \pm 10$ (радиус Земли в км);
- 3) $|c = 2,998 \cdot 10^5| < 100$ (скорость света в км/с);
- 4) $m = 5,976 \cdot 10^{24}$, все цифры верные (масса Земли в кг);
- 5) $d = 1,392 \cdot 10^6$, все цифры верные (диаметр Солнца в км);
- 6) $l = 3\,476 \pm 1$ (диаметр Луны в км).

46. В табл. 1 указаны приближенные значения *a* и точные значения величины *x*. Вычислите абсолютную (*h*) и относительную (*r*) погрешности вычислений, последнюю — с четырьмя знаками после запятой.

Таблица 1

№ п/п	<i>x</i>	<i>a</i>	№ п/п	<i>x</i>	<i>a</i>
1	523	500	6	$\frac{7}{13}$	$\frac{1}{2}$
2	3,14	3,1	7	$\frac{13}{101}$	0,13
3	1 064	1 000	8	$\frac{501}{500}$	1
4	$1,12 \cdot 10^4$	10^4	9	$6,35 \cdot 10^3$	6 000
5	0,736	0,74	10	0,0083	0,01

■ Приближенные вычисления

47. Вычислите с точностью до 0,01 значения выражений $x + y$, $x - y$, xy и $\frac{x}{y}$ для значений x и y , указанных в табл. 2.

48. Вычислите приближенно значения выражения $A = x^2 - xy + y^2$ при указанных значениях x и y (табл. 3). Ответ запишите в стандартном виде, округлив мантиссу до десятых.

49. Средний радиус Земли равен 6 371 117,673 м (рис. 7). В задачах его часто округляют до 6 400 км. Какова при этом в процентах точность полученного результата (относительная погрешность)?

Таблица 2

x	2,1	6,18	26,4	0,567	$1,12 \cdot 10^{-2}$	2 315,67
y	3,5	2,24	17,3	0,314	$6,08 \cdot 10^{-2}$	0,23

Таблица 3

x	$6,2 \cdot 10^6$	$1,04 \cdot 10^{-3}$	$5,761 \cdot 10^2$	$2,7 \cdot 10^{-3}$
y	$3,4 \cdot 10^6$	$2,16 \cdot 10^{-3}$	$6,23 \cdot 10^3$	$4,6 \cdot 10^4$



Рис. 7

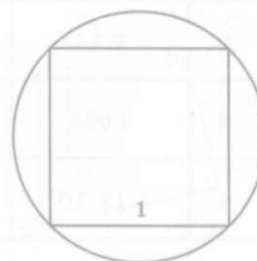


Рис. 8

50. Скорость света в вакууме равна $299\,792,5 \pm 0,4$ км/с, скорость звука в воздухе составляет $331,63 \pm 0,04$ м/с. Что измерено с большей точностью (относительной погрешностью)?

51. Для определения длины окружности в столярном деле иногда выполняют следующее. На прямой откладывают три раза по диаметру и еще длину, равную $0,15$ диаметра. Определите точность (относительную погрешность) этого измерения.

52. Сторона квадрата равна $2,4 \text{ м} \pm 0,05 \text{ м}$. С какой точностью (относительной погрешностью) можно найти площадь этого квадрата?

53. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна 1 (рис. 8). Приближенные значения для площади круга и длины окружности взяли с двумя знаками после запятой. Какой результат, содержащий две цифры, вы запишите окончательно?

Глава 2

Корни, степени и логарифмы

Основные направления приложений: ■ Приближенные вычисления ■ Сложные проценты ■ Уравнение показательного роста ■ Сравнение скорости роста

■ Приближенные вычисления

1. Вычислите приближенно значения следующих функций:

- | | | |
|------------------------|-------------------|---------------------------------------|
| 1) $\sqrt{1,04}$; | 5) $e^{0,2}$; | 9) $\ln 1,002$; |
| 2) $\sqrt{0,992}$; | 6) $e^{-0,03}$; | 10) $\ln 0,94$; |
| 3) $\sqrt[3]{0,94}$; | 7) $e^{2,04}$; | 11) $\ln(1 + e^{0,06} - e^{-0,02})$; |
| 4) $\sqrt[3]{8,016}$; | 8) $2^{-3,006}$; | 12) $\log_2 8,032$. |

2. Вычислите с одним знаком после запятой значения следующих функций:

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1) $e^{0,1}$; | 4) $\ln 1,1$; | 7) $2^{0,2}$; |
| 2) $e^{-0,2}$; | 5) $\ln 0,8$; | 8) $10^{0,9}$; |
| 3) $e^{1,2}$; | 6) $\lg 10,1$; | 9) $\lg 0,9$. |

3. Известно много формул для приближенного вычисления числа e . Самыми распространенными являются формулы

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad e_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n},$$

которые при натуральных значениях n дают последовательности приближенных значений e с любой степенью точности. Выпишем первые члены этих последовательностей:

$$e_1 = (1 + 1)^1 = 2, \quad e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \approx 2,25\dots,$$

$$e_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, \quad e_2 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} = e_1 + \frac{1}{2} = 2,5\dots$$

Проведите вычисления по этим формулам с точностью до 10^{-4} с помощью микрокалькулятора. Какая из двух формул быстрее дает требуемое приближение?

■ Сложные проценты

4. В городе N в 1990 г. проживало 149 тыс. человек. В связи с демографическим спадом число жителей ежегодно уменьшалось на 1,7 %. Сколько человек проживало в городе в конце 2002 г.?

5. Некто каждый год в один и тот же день вносит в банк 3 тыс. р. под 5 % годовых. Какая сумма будет на счету через 10 лет?

6. Если за год цены выросли в 2 раза, то какова средняя ежемесячная инфляция?

7. Банк выплачивает 10 % годовых от суммы вклада. Какое вложение более выгодно:

а) сделать вклад на сумму 10 тыс. р. 1 января и закрыть счет через год;

б) сделать вклад на сумму 10 тыс. р. 1 января, снять всю сумму 1 июля и тут же положить ее снова;

в) через сколько лет вложенная сумма будет в 1,5 раза больше?

8. В растворе содержится 40 % соли. Если добавить 120 г соли в раствор, то процентное содержание соли станет равным 70 %. Сколько соли было первоначально в растворе?

9. В свежем продукте процентное отношение воды к сухому веществу составляло 70 : 30. При сушке за счет испарения воды масса продукта сократилась на 25 %. В каком процентном отношении стала находиться вода в продукте после сушки?

10. В 2,5 кг абрикосов содержалось 500 г сухих веществ, остальное — вода. При изготовлении из этих абрикосов кураги было удалено 100 г сухих веществ (косточки), остальное высушено на солнце. В результате получилось 600 г кураги. Определите:

- каково отношение сухих веществ к воде у получившейся кураги;
- какой процент воды испарился при сушке.

■ Уравнение показательного роста

11. Вычислите период полураспада вещества, если за год его масса уменьшилась в 10 раз.

12. Период полураспада вещества равен 2 сут. Через какое время его масса уменьшится в 1 000 раз?

13. Выведите из барометрической формулы¹ формулу для вычисления высоты подъема в зависимости от давления.

14. Коэффициент звукоизоляции кирпичной стены в один кирпич равен 50 дБ. Каков коэффициент звукоизоляции стены в два кирпича?

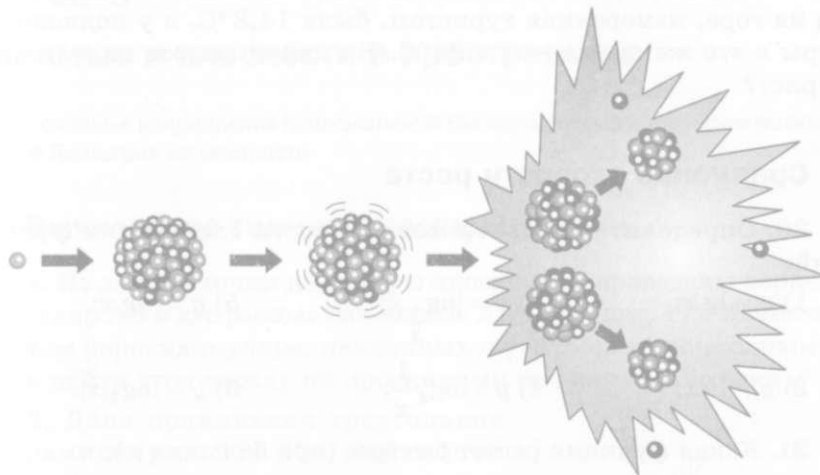


Рис. 9

¹ Барометрическая формула определяет зависимость давления газа от высоты в поле силы тяжести: $p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$, где p_0 — давление при $h = 0$; m — масса одной молекулы газа; g — ускорение свободного падения ($g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$); h — высота; k — постоянная Больцмана ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$); T — термодинамическая температура.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
БИБЛИОТЕКА 17

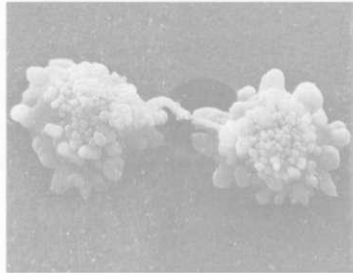


Рис. 10

15. От m мг вещества через t мин радиоактивного распада осталось n мг. Найдите его период полураспада.

16. Во сколько раз увеличится число нейтронов в цепной реакции за время $t = 10$ с, если среднее время жизни одного поколения $T = 80$ мс, а коэффициент размножения нейтронов $k = 1,004$ (рис. 9)?

17. Период полураспада радиоактивного вещества равен 1 ч. Через сколько часов его количество уменьшится в 10 раз? Вычислите, какая доля радиоактивного вещества останется через 1 000 лет, если период его полураспада равен 1 550 лет.

18. Бактерия в питательной среде через каждые 0,5 ч делится пополам (рис. 10). Сколько бактерий может получиться через 10 ч?

19. В горах температура воздуха t летом при подъеме на каждые 100 м в среднем понижается на $0,7^\circ\text{C}$. В 11.00 температура на горе, измеренная туристом, была $14,8^\circ\text{C}$, а у подножия горы в это же время — $t = 26^\circ\text{C}$. На какой высоте находился турист?

■ Сравнение скорости роста

20. Определите характер монотонности следующих функций:

1) $y = \lg x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 5) $y = -\lg x$;

2) $y = \ln x$; 4) $y = \log_2 \frac{1}{x}$; 6) $y = \log_2 |x|$.

21. Какая функция растёт быстрее (при больших x):

$y = 100x^2$ или $y = 0,1x^4$?

22. Расположите в порядке скорости роста следующие функции:

1) $y = 2x$; 3) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 5) $y = \frac{x^2}{2}$;

2) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = x^5$; 6) $y = x^4$.

23. Какая функция убывает быстрее: $y = \frac{1}{10x}$ или $y = \frac{10}{x^2}$?

24. Расположите в порядке скорости убывания следующие функции:

1) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{x^4}$; 5) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

2) $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$;

25. Укажите, какие из следующих показательных функций возрастают, а какие — убывают:

1) $y = 5^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$; 7) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$;

2) $y = 3^{x-1}$;

3) $y = \left(\frac{9}{10}\right)^x$; 5) $y = 2^{-x}$; 8) $y = -2\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

6) $y = 3^x \cdot 4^x$;

Глава 3

Прямые и плоскости в пространстве

- Основные направления приложений: ■ Вычисление геометрических величин
- Геометрия на местности

■ Вычисление геометрических величин

1. Из данной точки на данную плоскость α проведены перпендикуляр AB и две равные наклонные AD и AC (рис. 11). Известны длины перпендикуляра, наклонных и угол между наклонными. Как найти угол между их проекциями на данную плоскость?

2. Дана правильная треугольная пирамида (рис. 12). Как найти угол между:

- а) боковой гранью и основанием;
- б) соседними боковыми гранями?

Ребра пирамиды известны. Обобщите эту задачу.

3. В правильной треугольной пирамиде (см. рис. 12) известны сторона

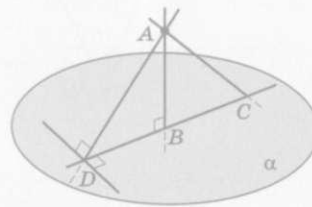


Рис. 11

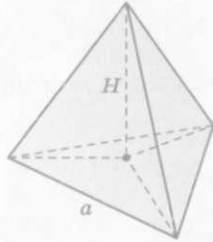


Рис. 12

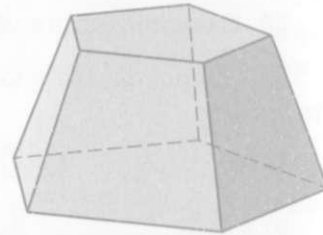


Рис. 13

основания a и высота H . Как вычислить площадь сечения, проходящего:

- а) параллельно основанию через середину высоты;
- б) через боковое ребро и высоту;
- в) через сторону основания перпендикулярно противоположному боковому ребру;
- г) через центр основания параллельно боковой грани;
- д) через середины четырех ребер?

4. В правильной n -угольной усеченной пирамиде известны стороны оснований и боковое ребро (рис. 13). Как вычислить высоту пирамиды?

5. В трехгранном угле все плоские углы прямые. Известны два угла, которые составляют с двумя его ребрами луч, выходящий из вершины угла и проходящий внутри него. Как найти угол между этим лучом и третьим ребром?

6. Пусть все двугранные углы трехгранного угла прямые. Некоторая точка, лежащая внутри него, удалена от его вершины

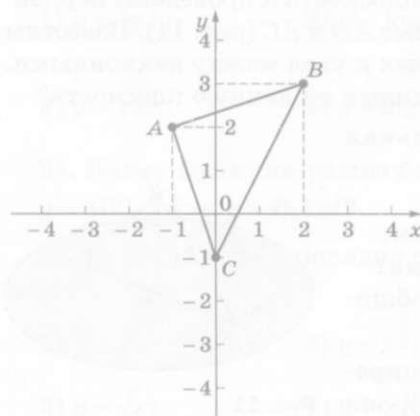


Рис. 14

на данное расстояние и равноудалена от всех граней. Как найти расстояние от нее до его граней?

7. Известны расстояния от трех вершин параллелограмма до данной плоскости. Как найти расстояние до этой плоскости от четвертой вершины параллелограмма?

8. Даны координаты вершин треугольника ABC : $A(-1; 2)$; $B(2; 3)$; $C(0; -1)$, рис. 14. Найдите:

- 1) уравнения сторон треугольника (т.е. линейные функции, графиком которых будут прямые AB , BC , AC);
- 2) координаты середин сторон треугольника;
- 3) уравнения медиан треугольника;
- 4) уравнения средних линий треугольника.

■ Геометрия на местности

9. В землю врыты два столба высотой 2 и 3,5 м. Расстояние между столбами равно 2 м. Определите длину провода, соединяющего без провиса верхние концы столбов.

10. От верхнего конца столба протянут провод к стене дома. Задайте необходимые данные и вычислите длину провода.

11. Самолет летит по прямой с постоянной скоростью (рис. 15). В любой момент времени можно определить расстояние до него. Как найти его скорость?

12. Можно ли найти высоту Александровской колонны в Санкт-Петербурге (рис. 16), не подходя к ней, имея необходимые измерительные инструменты?

13. Для определения ширины реки турист залез на дерево, прихватив с собой транспортир. Как ему найти эту ширину?



Рис. 15



Рис. 16

14. Как добиться горизонтального положения планки для прыжков в высоту?

15. Шест надо установить вертикально. Сколько вам понадобится для этого тросов?

16. Плоский предмет заданной площади расположен перпендикулярно плоскости земли и освещается параллельным пучком света, например солнечными лучами. Как найти площадь тени от этого предмета?

17. Как вычислить угол ската крыши (рис. 17)?

18. Из наблюдательного пункта установили, что расстояние до самолета увеличивается, а угол, под которым он виден, уменьшается. Взлетает этот самолет или садится?

19. Чему равно расстояние от Санкт-Петербурга до плоскости:

а) гринвичского меридиана;

б) экватора?

(Координаты Санкт-Петербурга: 60° северной широты и 30° восточной долготы.)

20. У прямоугольного стола две противоположные (т.е. расположенные по диагонали) ножки одинаковы, а третья нога подпилена на 10 см. На сколько надо удлинить четвертую ногу стола, чтобы стол стоял, хотя и наклонно, но не качался?

21. Имеется два вертикальных зеркала, соединенных вместе. Горизонтальный луч света, параллельный плоскости одного из этих зеркал, отражается от второго зеркала по прямой, перпендикулярной первому зеркалу. Найдите угол между зеркалами (отражение происходит по законам оптики: угол отражения равен углу падения).



Рис. 17

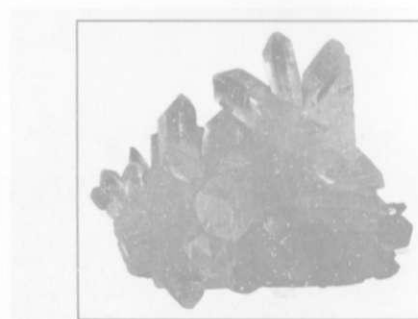


Рис. 18

22. В характеристике кристалла важную роль играют углы между его соседними гранями (рис. 18). Предложите идею прибора для измерения этого угла, не производя измерений на самом кристалле.

23. Вы находитесь на берегу реки и вам нужно найти ее глубину, чтобы выяснить возможность перейти ее вброд. У вас есть леска, два поплавка и грузило. Сможете ли вы решить эту задачу?

24. Как найти: а) скорость самолета; б) высоту, на которой он летит (при условии, что скорость самолета и высота постоянны)? У вас есть прибор для измерения времени, расстояний и углов.

25. Как с помощью двух нитей определить, будет ли стол с четырьмя ножками стоять на ровном полу устойчиво?

26. При установке нивелира инструмент проверяют на горизонтальность обычно только по двум непараллельным направлениям (рис. 19). Достаточно ли такая проверка?

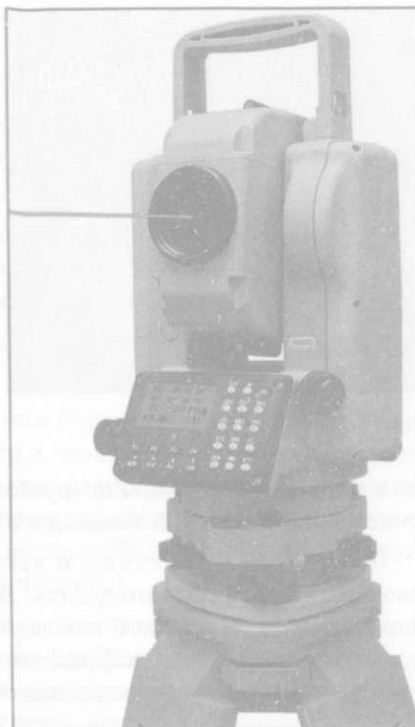


Рис. 19

Глава 4

Комбинаторика

Основное направление приложений: ■ Оценка числа возможных вариантов

■ Оценка числа возможных вариантов

1. Велосипедистам одной школы выдали удостоверения, отмеченные трехразрядными числами, не содержащими 8 (001, 002, ... и т. д.) (рис. 20). Номера при этом использованы все. Сколько в школе велосипедистов?



Рис. 20

2. На вершину горы ведут четыре тропы. Сколькими способами можно совершить прогулку туда и обратно? Как изменится полученный результат, если спуск идет не по той дороге, по которой шел подъем?

3. В классе изучают 10 предметов. В понедельник проводится 6 различных уроков. Сколькими способами можно составить различные расписания на понедельник?

4. Сколько игр будет проведено в первенстве страны по футболу, если в розыгрыше принимают участие 16 команд и команды играют между собой в два круга?

5. Пассажир оставил в автоматической камере хранения свои вещи и пошел погулять. А когда вернулся, то обнаружил, что не помнит, в какой последовательности идут четыре цифры в шифре, хотя сами цифры помнил. Сколько раз (в худшем случае) ему придется осуществлять набор шифра?

6. В алфавите 32 буквы, из которых 10 гласных, остальные согласные. Вычислите:

- 1) общее количество трехбуквенных слов;
- 2) количество четырехбуквенных слов с чередующимися гласными и согласными;
- 3) число фраз, содержащих по три двухбуквенных слова;
- 4) число фраз, содержащих не более трех слов, причем каждое слово имеет не более трех букв и начинается с гласной;
- 5) число пятибуквенных слов, в которых рядом нет двух одинаковых букв;
- 6) число четырехбуквенных слов, у которых гласных и согласных поровну;
- 7) число пятибуквенных слов, являющихся палиндромами (т. е. не меняющихся при чтении справа налево, как, например, АННА);
- 8) число слов, состоящих из четырех правильных слогов (назовем слог правильным, если он состоит из одной гласной и одной согласной буквы (в любом порядке));
- 9) число шестибуквенных слов, в которых рядом нет двух одинаковых букв, но у которых третья буква известна (фиксирована);

10) число четырехбуквенных слов, у которых никакая буква не повторяется более двух раз.



Рис. 21

7. Номер автомобиля состоит из трех букв русского алфавита (33 буквы) и трех цифр (рис. 21). Сколько существует различных номеров автомобилей?

8. В лифте, останавливаемом на семи этажах, едут 10 человек. Каждый из них независимо друг от друга может сойти на любом этаже. Сколько способов существует?

9. Сколькими способами можно разложить семь разных монет в три кармана?

10. По n ячейкам распределяются N различных частиц. Каждая частица может занять место в любой ячейке независимо от остальных, и в каждой ячейке может находиться любое число частиц. Подсчитайте число возможных распределений частиц по ячейкам. (Распределение Максвелла — Больцмана. Ему не удовлетворяет ни одна из известных частиц.)

11. Десять различных писем надо запечатать в конверты и наклеить на каждый конверт марок на 4 р. Имеются марки трех сортов по 4 р. и четырех сортов по 2 р. (в неограниченном количестве). Сколькими способами можно наклеить марки на конверты?

12. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если всего в наличии 50 солдат и 3 офицера?

13. Сколькими способами на собрании, где присутствует 100 человек, можно выбрать 7 членов президиума, в число которых должен входить председатель или секретарь собрания или оба вместе?

14. В мешке лежит n различных пар ботинок. Сколькими способами можно выбрать из мешка $2k$ ботинок так, чтобы из них нельзя было составить ни одной пары?

15. Пишутся последовательности из 30 символов 0 или 1. Докажите, что их число больше 10^9 .

16. В двух мешках лежит по одинаковому количеству разных шаров (рис. 22). Первый человек выбрал по одному шару

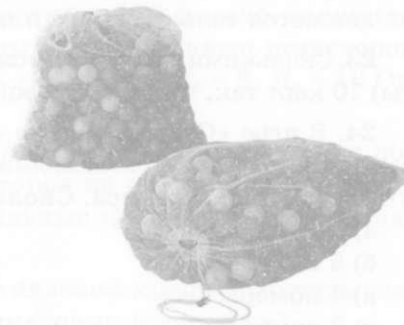


Рис. 22

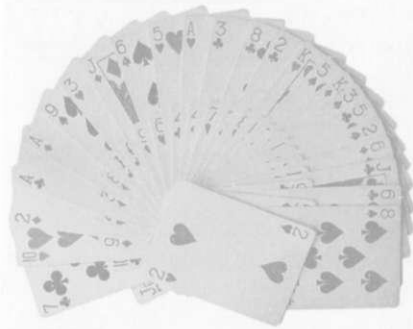


Рис. 23

из каждого мешка, а перед тем, как стал выбирать по одному шару второй человек, кто-то переложил один шар из одного мешка в другой. У кого из них больше вариантов выбора, если учесть, что выбранные шары возвращаются обратно?

17. Слово составляется из различных букв. Какова может быть его длина, чтобы число анаграмм для этого слова (слов, получающихся перестановками букв) не превышало 10 тыс.?

18. Вы берете с полки две книги. Сколько должно быть на полке книг, чтобы у вас было, по крайней мере, 100 вариантов выбора?

19. Каких четырехзначных чисел больше — тех, которые делятся на 2 или на 3, или тех, которые не делятся на 3?

20. Вы должны выбрать 5 фруктов. В одном случае есть две корзины, в каждой из которых лежит по 9 фруктов, и вы можете взять все 5 фруктов из любой из них. В другом случае есть только одна корзина, но в ней лежит 10 фруктов. В каком из случаев у вас больше вариантов выбора?

21. В условиях предыдущей задачи будем считать, что в первом случае в каждой из двух корзин лежит по n фруктов, а во втором — в единственной корзине на один фрукт больше. Вы хотите иметь больше вариантов выбора. При каких значениях n вам более выгоден первый случай?

22. Сколькими способами может добраться на шахматной доске король из левого нижнего угла в правый верхний угол, если он движется только вправо или вверх?

23. Сколькими способами можно вынуть из колоды карт (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них был хотя бы один туз (рис. 23)?

24. В игре «Спортлото 6 из 49» предлагалось угадать номера выигрышных билетов, заполнив специальные карточки и зачеркнув выбранные номера. Сколько есть способов угадать:

- а) 6 номеров;
- б) 5 номеров;
- в) 4 номера;
- г) 3 номера;
- д) не угадать ни одного номера?

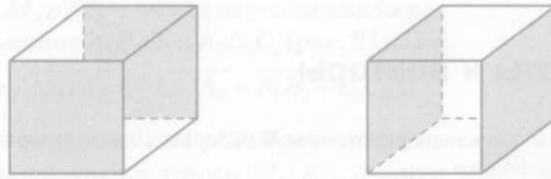


Рис. 24

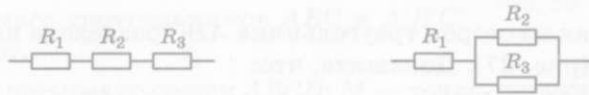


Рис. 25

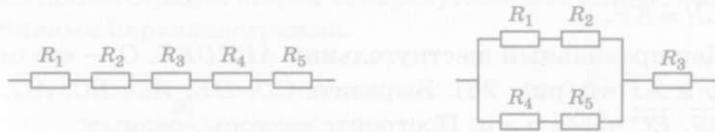


Рис. 26

25. Грани куба раскрашиваются белой или черной краской (каждая грань раскрашивается одним цветом). Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы ни поворачивать куб (рис. 24). Сколько существует различных способов раскраски?

26. Используйте биномиальную формулу для приближенного вычисления выражения $1,002^{10}$.

27. Сколько различных сопротивлений можно получить, используя резисторы и их соединения, из следующего набора: $R_1 = 10$, $R_2 = 100$ и $R_3 = 1\,000$ Ом (рис. 25).

28. Сколько различных сопротивлений можно получить последовательным и параллельным соединениями резисторов из следующего набора: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 4$, $R_4 = 8$, $R_5 = 16$ Ом (рис. 26)?

29. Сколько различных значений сопротивления можно получить, используя набор резисторов из предыдущей задачи, образуя из него две последовательные цепи, соединенные параллельно?

30. Сколько различных сопротивлений можно получить различными соединениями трех одинаковых резисторов?

31. Напишите первые три члена выражения $(p + q)^{50}$.

Глава 5

Координаты и векторы

Основные направления приложений: ■ Использование векторов в геометрии
■ Векторы в физике

■ Использование векторов в геометрии

1. Каждая из сторон треугольника ABC разделена на три равные части (рис. 27). Докажите, что:

- $\overline{RK} + \overline{LM} + \overline{NP} = \vec{0}$;
- $\overline{RM} = \overline{PL} + \overline{KN}$;
- $\overline{LN} = \overline{KP}$.

2. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, O — его центр, $\overline{AB} = \mathbf{p}$ и $\overline{AF} = \mathbf{q}$ (рис. 28). Выразите \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{AD} , \overline{BC} , \overline{AO} , \overline{AC} , \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{EC} через \mathbf{p} и \mathbf{q} . Постройте векторы, равные:

- $\overline{AB} + \overline{BC}$;
- $\overline{AB} + \overline{CD}$;
- $\overline{AB} + \overline{DF}$;
- $\overline{AB} + \overline{DE}$;
- $\overline{AC} + \overline{DE}$;
- $\overline{AB} + \overline{AF}$.

3. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — произвольная точка (рис. 29). Докажите, что

$$\overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$

4. В тетраэдре $ABCD$ точка O — центр масс треугольника ABC . Выразите \overline{AO} через \overline{AB} , \overline{AC} и \overline{AD} (рис. 30).

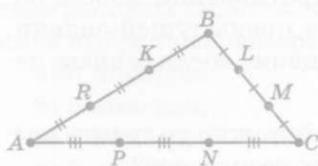


Рис. 27

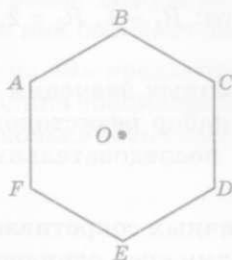


Рис. 28

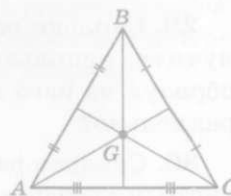


Рис. 29

5. Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (рис. 31). Докажите, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2})$.

6. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC выбраны такие точки C' , A' , B' , что $\frac{|AC'|}{|BC'|} = \frac{|BA'|}{|CA'|} = \frac{|CB'|}{|AB'|}$ (рис. 32). Докажите, что центры масс треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают.

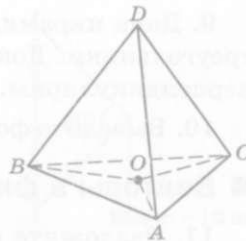


Рис. 30

7. Дан четырехугольник $ABCD$; M — точка, лежащая на одной из сторон (рис. 33). Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон четырехугольника $ABCD$, являются вершинами параллелограмма.

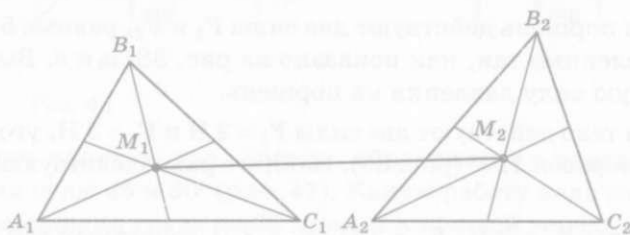


Рис. 31

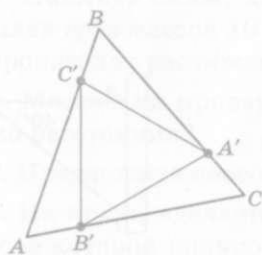


Рис. 32

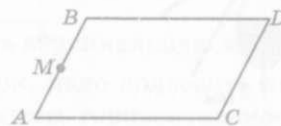


Рис. 33

8. Дан пятиугольник $ABCDE$; K , L , M , N — середины сторон AB , BC , CD и DE , P и Q — середины отрезков KM и LN соответственно (рис. 34). Докажите, что $PQ \parallel AE$ и $|PQ| = \frac{1}{4}|AE|$.

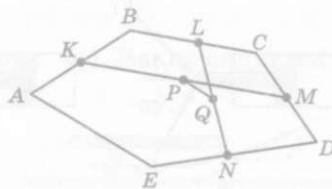


Рис. 34

9. Дана пирамида $ABCD$, все грани которой — правильные треугольники. Докажите, что скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны.

10. Выведите формулу $(a + b + c)^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(ab + ac + bc)$.

■ Векторы в физике

11. Разложите графически силу тяжести $F_{\text{тяж}}$ котла по направлениям опор (рис. 35).

12. Мачтовый кран состоит из стрелы AC и цепи BC (рис. 36). К концу стрелы приложена сила mg . Разложите эту силу по направлениям AC и BC .

13. К концу кронштейна приложена сила $mg = 42$ Н (рис. 37). Найдите силу сжатия стержня BC и силу растяжения стержня AB .

14. На поршень действуют две силы F_1 и F_2 , равные $5\sqrt{2}$ и 6 Н и направленные так, как показано на рис. 38, *a* и *б*. Вычислите суммарную силу давления на поршень.

15. На тело действуют две силы $F_1 = 2$ Н и $F_2 = 3$ Н, угол между которыми равен 120° (рис. 39). Найдите равнодействующую этих сил.

16. Силы $F_1 = 2$ Н, $F_2 = 3$ Н, $F_3 = 3$ Н действуют так, как показано на рис. 40. С помощью формулы, полученной в задаче 10, вычислите равнодействующую силу.

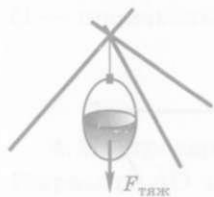


Рис. 35

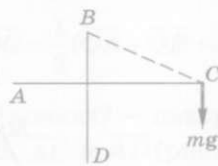


Рис. 36

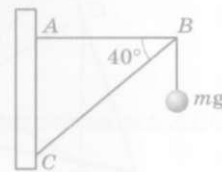


Рис. 37

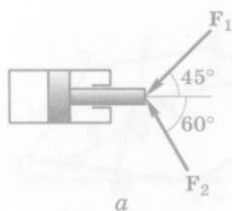
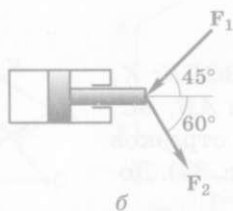


Рис. 38



б

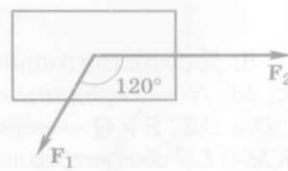


Рис. 39

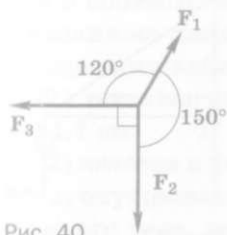


Рис. 40

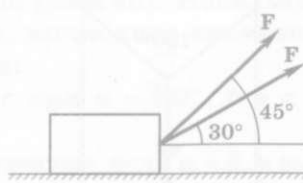


Рис. 41

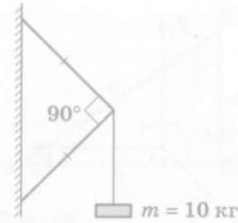


Рис. 42

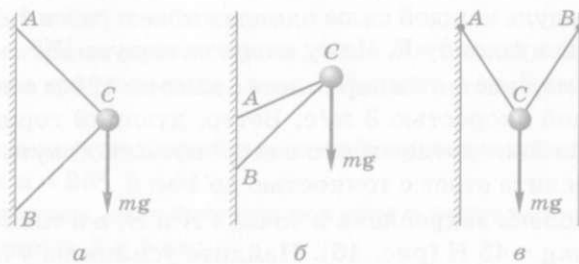


Рис. 43

17. Груз тянут за две веревки, образующие с направлением движения углы 45 и 30° (рис. 41). Какую работу надо совершить для перемещения груза на 25 м, если к каждой веревке прикладывается постоянная сила $F = 200$ Н?

18. Найдите силы, действующие на стержни, на которых укреплен груз массой 10 кг (рис. 42). Определите, какие из этих сил производят растяжение, а какие — сжатие.

19. Можно ли проверить вертикальность мачты, измеряя только расстояния?

20. Предложите способ установить вертикальную мачту.

21. На крюк, вделанный в потолок, надо повесить люстру, в основе которой кольцо. Как обеспечить горизонтальное положение этого кольца?

22. Разложите графически силу mg по направлениям стержней AC и BC (рис. 43, $a - в$).

23. Сани тянут по снегу за веревку (рис. 44). Какие силы действуют на сани? Разложите силу натяжения веревки на горизонтальную и вертикальную составляющие.



24. На точку O действуют три силы, расположенные в одной плоскости

Рис. 44

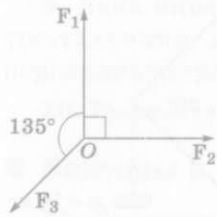


Рис. 45

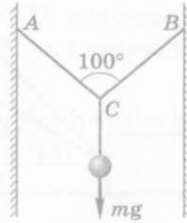


Рис. 46

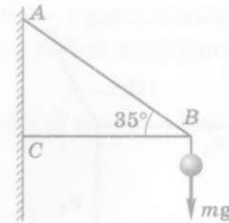


Рис. 47

(рис. 45). Модуль каждой силы один и тот же и равен 1. Постройте результирующую силу F . Чему равен ее модуль $|F|$?

25. Груз опускается на парашюте с высоты 120 м с постоянной вертикальной скоростью 3 м/с. Ветер, дующий горизонтально со скоростью 2 м/с, относит его в сторону. Какой путь пролетает груз? Вычислите ответ с точностью до 1 м.

26. Проволока закреплена в точках A и B , а в точке C приложена сила $mg = 45$ Н (рис. 46). Найдите усилия на участках AC и BC , если точки A и B расположены на одном уровне.

27. К концу кронштейна приложена сила $mg = 42$ Н (рис. 47). Найдите силу сжатия стержня BC и силу растяжения стержня AB .

28. Точка движется по прямой с постоянной скоростью. Через 2 с после начала движения она имела координаты $(-1; 3)$, а через 5 с — $(5; 0)$. Найдите координаты:

- вектора скорости (разложите его по осям координатных осей);
- точки в начальный момент. Напишите уравнение:
- движения точки (векторное);
- движения точки (в координатах);
- прямой, по которой движется точка.

Глава 6

Основы тригонометрии

Основные направления приложений: ■ Вычисления в геометрии ■ Круговое движение ■ Тригонометрия на местности

■ Вычисления в геометрии

1. В прямоугольном треугольнике ABC a и b — катеты, c — гипотенуза, α и β — острые углы, противолежащие катетам

a и b соответственно (рис. 48). Используя указанные данные, вычислите значения следующих величин:

1) гипотенузы c при $\alpha = 60^\circ$, $b + c = 14,7$ см;

2) катетов и гипотенузы, если $\alpha = \beta$, а высота, опущенная на гипотенузу из вершины прямого угла, равна 10 см;

3) высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, если $\beta = 30^\circ$, $c = 14$ см;

4) биссектрисы прямого угла, если $a = 6$ см, $b = 8$ см;

5) сторон треугольника, если b больше a на 2 см и c больше b на 2 см;

6) угла между медианой и высотой, проведенными из прямого угла, если $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 65^\circ$;

7) гипотенузы, если биссектриса угла α делит катет на отрезки, длины которых 3 и 5 см;

8) радиуса описанной окружности, если $a = 10$ см, а высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна 8 см;

9) периметра треугольника (высота, проведенная из вершины прямого угла, делит прямоугольный треугольник на два треугольника, периметры которых равны соответственно 3 и 4 см).

10) периметра треугольника, если $a = 3$ см, а гипотенуза больше другого катета на 1 см;

11) площади треугольника, если $c = 10$ см, а катет a составляет 40% от катета b ;

12) площади треугольника OAD , если точка D лежит на катете BC и $OD \perp BC$ (O — середина гипотенузы, $\alpha = \beta$, $a = 2$ см);

13) площади треугольника, если высота треугольника, опущенная из вершины прямого угла, равна 3, а разность между проекциями катетов на гипотенузу — 8.

14) биссектрисы прямого угла, если $a = b$, а площадь треугольника равна 36 см^2 ;

15) площади треугольника, если $a + b = 8$ см, а высота, опущенная из вершины прямого угла, равна 6 см.

2. В треугольнике ABC со сторонами a, b, c противоположащие этим сторонам углы обозначены через α, β и γ (рис. 49). Используя указанные данные, определите значения следующих величин, выразив ответ с точностью до 0,01:

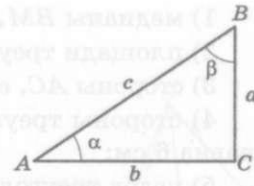


Рис. 48

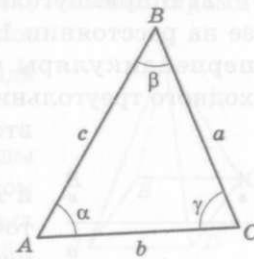


Рис. 49

- 1) медианы BM , если $a = 18$ см, $b = 12$ см; $c = 14$ см.
- 2) площади треугольника, если $a = 13$ см; $b = 14$ см; $\gamma = 45^\circ$;
- 3) стороны AC , если $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$, а высота BD равна 15 см;
- 4) стороны треугольника, если $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$, а высота AD равна 6 см;
- 5) углов треугольника, если $a = 6$ см; $b = 7,3$ см; $c = 4,8$ см;
- 6) оставшихся сторон и углов треугольника, если $a = 12,3$ см; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 75^\circ$;
- 7) биссектрис треугольника, если $a = 10$ см; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 70^\circ$;
- 8) стороны BC , если $b = 2$ см; $c = 3$ см; AD — биссектриса; расстояние от точки D до сторон треугольника равно 1;
- 9) медианы, проведенной к боковой стороне, если в равнобедренном треугольнике $a = b$; $c = \sqrt{84}$ см; угол при основании 30° ;
- 10) площади треугольника, если его углы α , β , γ образуют арифметическую прогрессию, $a = 1$ см, $b = 4$ см;
- 11) углов треугольника, если известно, что биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на четыре равные части;
- 12) угла при вершине равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 16 см, а медиана AD , проведенная к боковой стороне, — 10 см;
- 13) стороны AB треугольника, если $a = 6$ см; $b = 3$ см, а полусумма высот, проведенных к сторонам AC и CB , равна третьей высоте;
- 14) выясните, является ли треугольник остроугольным, прямоугольным, тупоугольным, если:
 - а) $a = 6$; $b = 5$; $c = 10$;
 - б) $a = 6$; $b = 8$; $c = 10$;
 - в) $a = 18$; $b = 16$; $c = 4$.

3. Разные задачи.

- 1) Две стороны треугольника равны 30 и 40. При каком угле между ними его площадь равна 400?
- 2) В прямоугольном треугольнике взята точка на гипотенузе на расстоянии $1/3$ от конца гипотенузы и из нее проведены перпендикуляры к его катетам. При каком остром угле исходного треугольника один из перпендикуляров в 2 раза больше второго?



Рис. 50

- 3) Известны расстояния от двух точек A и B до данной прямой a и расстояние между точками (рис. 50). Как найти угол между данной прямой и прямой AB (предполагается, что точки и прямая расположены в одной плоско-

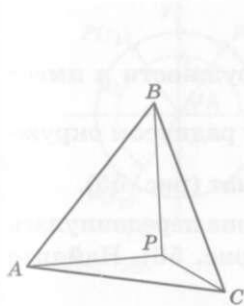


Рис. 51

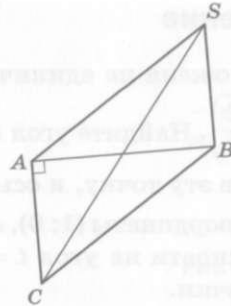


Рис. 52

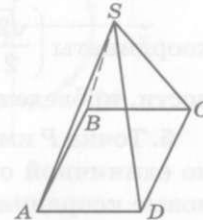


Рис. 53

сти)? Решите аналогичную задачу, если вместо прямой взять плоскость.

4) В треугольнике со сторонами 26, 28, и 30 см найдите радиус описанной окружности.

5) В треугольнике со сторонами 12, 14 и 16 см найдите радиус вписанной окружности.

6) В треугольнике ABC радиус описанной окружности равен 1, угол при вершине B равен $\frac{\pi}{6}$, угол при вершине A равен $\frac{5\pi}{12}$. Найдите площадь треугольника.

7) Стороны треугольника равны 6, 8, 10 см. Вычислите длину его наибольшей медианы и наименьшей биссектрисы.

8) К плоскости треугольника ABC проведен перпендикуляр PB (рис. 51). Найдите площадь поверхности тетраэдра $PABC$ и угол ABC , если $AB = BC$, $PB = 3$ см, $AC = 5$ см и угол APC равен $\frac{\pi}{3}$.

9) Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 10, а острый угол равен $\arcsin \frac{3}{5}$. Боковые грани наклонены к основанию под углом $\arctg 5$. Найдите объем пирамиды (рис. 52).

10) Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 16, угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды (рис. 53).

11) В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник с диагональю $d = 2$ и углом $\alpha = 60^\circ$ между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с основанием угол β , равный 45° . Найдите объем пирамиды (рис. 54).

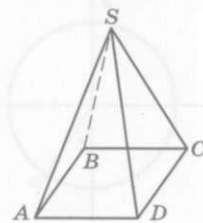


Рис. 54

■ Круговое движение

4. Точка P расположена на единичной окружности и имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Найдите угол t между радиусом окружности, проведенным в эту точку, и осью ординат (рис. 55).

5. Точка P имела координаты $(1; 0)$, а затем она передвинулась по единичной окружности на угол $t = 135^\circ$ (рис. 56). Найдите новые координаты точки.

6. Две точки P_1 и P_2 расположены на единичной окружности так, что угол между радиусами, идущими в эти точки, составляет 225° (против часовой стрелки). Абсцисса точки P_1 равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (рис. 57). Найдите координаты точки P_2 .

7. Три точки $P(t_1)$, $P(t_2)$ и $P(t_3)$ расположены на единичной окружности так, что угол между радиусами, идущими в точки $P(t_1)$ и $P(t_3)$, в три раза больше, чем угол между точками $P(t_1)$ и $P(t_2)$ (Все углы отсчитываются от оси абсцисс против часовой стрелки и находятся в пределах от 0 до 360° .) Известно, что точки не могут располагаться внутри одной четверти и что точка $P(t_2)$ расположена в третьей четверти, причем $\operatorname{tg} t_2 = \sqrt{3}$. Определите координаты точек, а также углы t_1 , t_2 и t_3 (рис. 58).

8. Три точки $P(t_1)$, $P(t_2)$ и $P(t_3)$ расположены на единичной окружности и делят окружность на три равные части (рис. 59). Определите значения тригонометрических функций углов t_1 , t_2 и t_3 , если известно, что точка $P(t_1)$ расположена в третьей четверти и ее координаты равны между собой.

9. Если гармоническое колебание задано функцией $y = \pm A \sin(\omega t - \alpha)$, где $A > 0$, $\omega > 0$, то его основные характеристики таковы: A — амплитуда; $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период; α — начальная фаза.

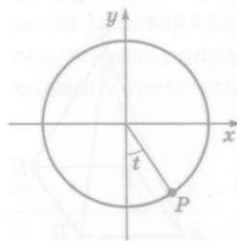


Рис. 55

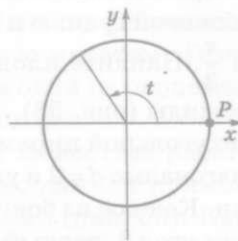


Рис. 56

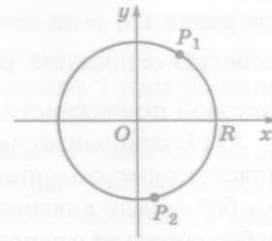


Рис. 57

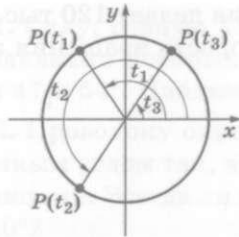


Рис. 58

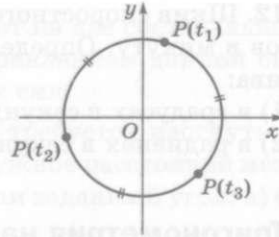


Рис. 59

Определите указанные характеристики для гармонических колебаний, заданных следующим образом: материальная точка движется по окружности с постоянной угловой скоростью. В момент времени $t = 1$ она находилась в точке с координатами $(0; 5)$; в момент времени $t = 2$ — в точке с координатами $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

10. Две точки одновременно начали двигаться по единичной окружности из точки P_0 в противоположных направлениях. Первая точка за 1 с проходит угол $\frac{\pi}{4}$ в положительном направлении, а вторая за 1 с проходит угол $\frac{\pi}{3}$ в отрицательном направлении.
- В какой точке окружности они встретятся в первый раз?
 - Встретятся ли они когда-нибудь снова в точке P_0 ?
 - Найдите все точки встречи.

11. Зубчатое колесо имеет 72 зубца (рис. 60). Выразите в градусах угол, на который повернется колесо при повороте на 1 зубец, 30 зубцов, 144 зубца, 300 зубцов.



Рис. 60

12. Шкив скоростного электродвигателя делает 120 тыс. оборотов в минуту. Определите угловую скорость вращения этого шкива:

- 1) в градусах в секунду;
- 2) в радианах в секунду.

■ Тригонометрия на местности

13. Вы находитесь на одном берегу реки, а вам надо найти расстояние между двумя объектами на другом берегу. Предполагается, что ширина реки известна и есть возможность измерить угол между двумя направлениями. Как вы будете действовать?

14. Из окна дома вы видите противоположные стороны улицы. Как найти ее ширину в этом месте, если вы знаете, на какой высоте находится окно и можете измерить угол между двумя направлениями?

15. Предположим, вы находитесь на берегу моря, на горе, высота которой известна. Как найти радиус Земли, если вы можете измерить угол между двумя направлениями?

16. Предложите какой-либо способ измерения расстояния до Луны, считая радиус Земли известным (рис. 61).

17. Считая известным радиус Земли и расстояние до Луны, предложите способ нахождения радиуса Луны.

18. Можно ли, держа на вытянутой руке монету, закрыть ею полную Луну?

19. Из гавани в 8.00 вышел теплоход по курсу 10° СВ (направление на северо-восток, составляющее 10° с направлением на север). Через 0,5 ч он изменил направление на 12° восточнее и, пройдя еще $\frac{3}{4}$ ч, взял постоянный курс — 72° СВ. Все это время

его скорость была 30 км/ч. Из той же гавани в 9.00 вышел катер и, двигаясь прямо, в 10.30 догнал теплоход. С какой скоростью он двигался и каким курсом?

20. Две силы, равные 36 и 83 Н, действуют на материальную точку под углом $77^\circ 12'$. Чему равна их равнодействующая и какой угол она образует с большей силой?



Рис. 61

21. Силу, равную 23 Н, раскладывают на две составляющие, направления которых образуют с направлением данной силы углы 47 и 54°. Найдите каждую из этих сил.

22. Проволоку определенной длины требуется изогнуть под заданным углом так, чтобы получить нужное расстояние между ее концами. Всегда ли это возможно, если заданный угол: а) 60°; б) 120°?

23. Два шкива разных диаметров требуется соединить ременной передачей. Это можно сделать двумя способами, один из которых — перекрестный (рис. 62, а), а другой — нет (рис. 62, б). Какой из них более выгоден (т. е. имеет меньшую длину)? Проверьте свой результат, если диаметры шкивов 1 000 и 30 мм, а расстояние между их центрами 2 200 мм.

24. Как можно показать, что с увеличением расстояния от наблюдателя до предмета уменьшается угол зрения, под которым наблюдатель видит этот предмет? Сформулируйте и проверьте обратное утверждение (в качестве предмета для простоты возьмите монету, расположенную в вертикальной плоскости, или картину, висящую на стене, или шар).

25. На круглой площадке проектируют две дорожки от центра до двух точек на ее краях. Можно ли сделать так, чтобы путь между этими точками по краю площадки был короче ломаной, соединяющей эти точки?

26. В окружность вписываются правильные многоугольники (рис. 63). Объясните, почему при увеличении числа их сторон длина стороны уменьшается. И наоборот.

27. Как изменяется длина вашей тени, если вы: а) идете по направлению к фонарному столбу; б) идете мимо фонарного столба?

28. Две силы приложены к материальной точке. Может ли длина их равнодействующей не измениться при увеличении угла в два раза?

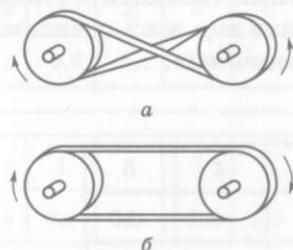


Рис. 62

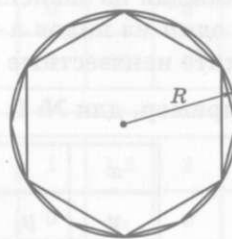


Рис. 63

29. Профиль железнодорожной насыпи спроектировали как равнобедренную трапецию, у которой боковые стороны равны меньшему основанию, а высота вдвое меньше большего основания. Возможна ли такая форма?

30. Известны скорость течения реки и скорость катера в стоячей воде. Требуется выяснить, под каким углом к берегу (прямолинейному) необходимо двигаться прямолинейно катеру, чтобы пристать на другом берегу в заданной точке ниже по течению.

Глава 7

Функции и графики

Основные направления приложений: ■ Табличное задание зависимостей
 ■ Построение зависимостей ■ Свойства практических зависимостей

■ Табличное задание зависимостей

1. По таблице значений переменных x и y (столбец А) определите вид зависимости между ними (а — д):

а) $\frac{y}{x} = k; k \neq 0;$

в) $y = ax^2, a \neq 0;$

г) $y = ax + b, b \neq 0;$

б) $xy = c, c \neq 0;$

д) ни одна из указанных.

Например, для № 3:

x	1	2	3	4
y	12	6	4	3

$xy = 12.$

2. Каждая из зависимостей, заданных таблицей в столбце Б, имеет один из видов а — д. Определите вид этих зависимостей и найдите неизвестные значения переменных.

Например, для № 1:

x	1	2	3	4	5
y	y_1	-4	-6	-8	-10

$y_1 = -2.$

Таблица значений переменных

А					Б							
№	зависимость				№	зависимость						
1	x	1	2	3	4	1	x	1	2	3	4	5
	y	-1,6	-1,2	-0,8	-0,4		y	y_1	-4	-6	-8	-10
2	x	1	2	3	4	2	x	2	x_1	4	6	8
	y	0,2	0,8	1,8	3,2		y	12	8	6	4	3
3	x	1	2	3	4	3	x	x_1	2	3	5	7
	y	12	6	4	3		y	1	y_1	9	13	17
4	x	1	2	3	4	4	x	1	x_1	5	x_2	8
	y	-0,3	-0,6	-0,9	-1,2		y	2	18	50	72	128
5	x	1	2	3	4	5	x	1	x_1	5	x_2	8
	y	4	2	1,5	1		y	1	7	y_1	16	22
6	x	1	2	3	4	6	x	0	1	4	8	x_1
	y	2,5	2	1,5	1		y	1	y_1	9	y_2	21
7	x	1	2	3	4	7	x	-5	0	x_1	5	15
	y	-0,6	-2,4	-5,4	-9,6		y	y_1	0	27	3	y_2
8	x	1	2	3	4	8	x	-3	1	1,2	2	4
	y	0,7	1,4	-2,1	2,8		y	y_1	0	y_2	0	y_3

А					Б							
№	зависимость				№	зависимость						
9	x	1	2	3	4	9	x	-3	-2	x_1	2	5
	y	0,25	0,5	0,75	1		y	12	y_1	0	y_2	12
10	x	1	2	3	4	10	x	0	1	x_1	2	6
	y	-6	-3	-2	-1,5		y	1	y_1	1	y_2	y_3

■ Построение зависимостей

3. При равномерном движении точки по прямой путь S прямо пропорционален времени движения t . Укажите общую формулу взаимосвязи $S = f(t)$. Каков смысл коэффициента пропорциональности? Найдите коэффициент пропорциональности, если известно, что за 3 с точка прошла расстояние 2 м.

4. Сила отталкивания между двумя положительными электрическими зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Запишите общую формулу для силы.

5. Известно, что зависимость $y = f(x)$ имеет вид либо $y = kx$, либо $y = \frac{c}{x}$, либо $y = ax^2$. Определите вид зависимости, если дано, что $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$:

1) $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 2$, $x_2 = 1$, $y_2 = 4$;

2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$;

3) $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 4$, $x_2 = 1$, $y_2 = 2$;

4) $x_1 = 2$, $y_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{8}$;

5) $x_1 = 3$, $y_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = 4$;

6) $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $y_2 = -2$.

6. Определите характер зависимости между указанными переменными в формуле (значения остальных переменных считать фиксированными):

1) $x(t), v = \frac{kt^2}{x}$;

4) $U(I), I = \frac{U}{R}$;

2) $m(E), E = \frac{mv^2}{2}$;

5) $s(t), 2s = at^2$;

3) $T(V), PV = RT$;

6) $E(h), \frac{mv^2}{2} + mgh = E$.

7. Зависимость между температурными шкалами Цельсия и Фаренгейта выражается формулой $t_F = 1,8t_C + 32$ (рис. 64). Найдите по шкале Фаренгейта:



Рис. 64

- точку замерзания воды;
- точку кипения воды;
- точку, соответствующую абсолютному нулю.

Могут ли показания температуры по обоим шкалам совпадать и при какой температуре?

8. Стоимость перевозки груза на расстояние 10 км составляет 2 000 р., а на расстояние 40 км — 3 500 р. Какова стоимость перевозки груза на расстояние 80 км при условии линейной зависимости стоимости от расстояния? (Качество покрытия автомобильной дороги одно и то же.)

9. Предположительно, что при углублении на каждые 30,5 м температура внутри Земли возрастает на 1°C . Принимая, что на поверхности Земли температура равна 0°C , определите, какова температура:

- в шахте на глубине 1 км;
- в центре Земли (радиус Земли принять равным 6 370 км).

10. Какова дальность горизонта в океане на высоте 50 м над уровнем моря (радиус Земли принять равным 6 400 км)?

11. Выразите как функцию:

- периметр равнобедренного треугольника p в зависимости от его основания a при постоянной боковой стороне c ;
- высоту треугольника h в зависимости от его основания a при постоянной площади S ;
- радиус круга R в зависимости от его площади S ;
- площадь круга S в зависимости от длины его окружности l ;
- катет a прямоугольного треугольника в зависимости от другого катета b при постоянной гипотенузе c ;
- площадь прямоугольника S в зависимости от его стороны a при постоянной диагонали c ;

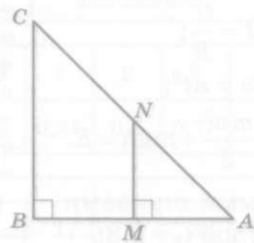


Рис. 65

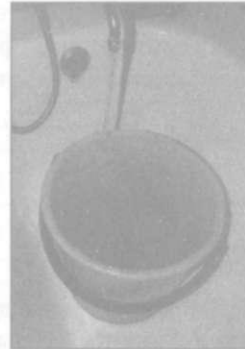


Рис. 66

7) высоту h прямоугольного треугольника, проведенную на гипотенузу c в зависимости от длин катетов a и b .

12. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = \sqrt{2}$ (рис. 65). Отрезок MN ($M \in AB$, N лежит на границе треугольника), перпендикулярный AB , движется от точки A до точки B ($AM = x$). Выразите как функцию от x площадь фигуры, задаваемой границей треугольника и отрезком MN . Какова область определения этой функции?

13. Из крана в ведро объемом 12 л на протяжении 10 мин льется вода со скоростью 2 л/мин (рис. 66). Запишите формулу для определения объема воды в ведре как функцию от времени t .

14. Выразите площадь равностороннего треугольника через длину x его стороны. Выразите эту же площадь через радиус r вписанной окружности (рис. 67).

15. Выразите площадь прямоугольника, вписанного в полуокруг радиуса 1, через основание прямоугольника x (рис. 68).

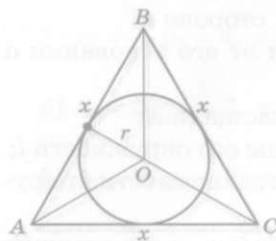


Рис. 67



Рис. 68

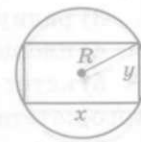


Рис. 69

16. Найдите область определения и область значений функции, описывающей зависимость площади квадрата от длины его стороны.

17. В окружность радиуса R вписан прямоугольник, длины сторон которого равны x и y (рис. 69).

а) Выразите y как функцию от x . При каких значениях x определено это выражение?

б) Во что превратится прямоугольник, если $x = 2R$?

в) Выразите площадь прямоугольника как функцию от x .

18. Из формулы $v = v_0(1 + kt)$ выразите t через v . Какой характер имеет эта зависимость?

19. Какие вы знаете формулы из физики, в которых зависимость между величинами выражается степенной функцией?

20. Согласно закону Вебера — Фехнера зависимость ощущения от раздражения (при средней интенсивности ощущений) выражается формулой $E = k \ln R$, где E — ощущение; R — раздражение. Убедитесь в том, что при возрастании раздражения в геометрической прогрессии ощущение возрастает в арифметической прогрессии.

21. Зависимость между четырьмя переменными имеет вид $F = \frac{mM}{r^2}$. Определите характер зависимостей для каждой пары переменных, считая две другие постоянными.

22. Из формулы Ван-дер-Ваальса $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = kT$ выразите параметр a через остальные величины.

23. Представим себе полет космической ракеты (рис. 70). Рассмотрим такие переменные, связанные с этим полетом: t — время, прошедшее от старта; a — ускорение; s — расстояние ракеты от Земли; m — масса ракеты; v — скорость ракеты. Выделите какие-либо пары переменных и придумайте, какие могут быть зависимости между ними. Ответ предложите в виде формулы или с помощью графика.

24. При свободном падении с нулевой начальной скоростью зависимости между расстоянием s , скоростью v и временем t таковы: $s = \frac{gt^2}{2}$, $v = gt$. Найдите зависимость



Рис. 70



Рис. 71

между расстоянием и скоростью. Какой характер имеет эта зависимость?

25. При подсчете баллов в соревнованиях по скалолазанию участнику, показавшему лучшее время, присуждается 60 баллов, а участнику, показавшему удвоенное время победителя, дается 0 баллов. Выведите формулу для определения баллов в зависимости от показанного времени, зная, что эта зависимость линейна.

26. Путешествие совершается на двух автомобилях — российском и британском. Спидометр первого из них показывает расстояние в километрах, второго — в милях (рис. 71). В начале путешествия первый спидометр показывал 28 300, а второй — 5 615. В конце путешествия первый — 31 205, второй — 7 420.

а) Вычислите длину мили в километрах.

б) Выведите формулы пересчета показаний спидометра одного автомобиля через показания другого.

■ Свойства практических зависимостей

27. Является ли монотонной функция, выражающая зависимость:

- 1) массы человека от его роста;
- 2) стоимости проезда на метро от протяженности маршрута;
- 3) успехов футбольной команды от стоимости ее игроков;
- 4) массы железного шарика от его объема;
- 5) массы тела от широты его расположения на Земле;
- 6) настроения от времени суток;
- 7) материального благосостояния индивидуума от уровня его образованности;
- 8) расстояния от поверхности земли прыгуна в высоту во время прыжка?

28. Является ли монотонной функция, выражающая зависимость:

- 1) площади равностороннего треугольника от его периметра;

2) площади прямоугольника от его периметра при фиксированной диагонали;

3) площади трапеции от ее средней линии при постоянной высоте;

4) радиуса окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника с постоянным основанием, от угла при его вершине;

5) медианы прямоугольного треугольника, проведенной к его гипотенузе, от длины гипотенузы;

6) высоты треугольника от его площади при постоянном основании?

29. Достигает ли наибольшего или наименьшего значения:

1) сторона треугольника при заданных двух других его сторонах;

2) высота, проведенная к гипотенузе, в прямоугольном треугольнике при заданной гипотенузе;

3) медиана, проведенная к гипотенузе в прямоугольном треугольнике при заданной гипотенузе;

4) площадь прямоугольника при заданном его периметре;

5) периметр прямоугольника при заданной его площади;

6) площадь треугольника при двух заданных его сторонах;

7) площадь параллелограмма при двух заданных его диагоналях;

8) последовательность площадей правильных многоугольников, вписанных в данную окружность;

9) последовательность периметров правильных многоугольников, описанных около данной окружности;

10) отношение площади круга к длине его окружности при изменении радиуса?

30. Является ли непрерывной функция, выражающая зависимость:

1) стоимости проезда на пригородном поезде от пройденного им расстояния;

2) показания электросчетчика от времени;

3) количества голов, забитых во время футбольного матча, от его продолжительности;

4) числа просмотров кинофильма от времени, прошедшего с момента его выпуска;

5) массы мотка проволоки от ее длины;

6) скорости автомобиля от объема израсходованного топлива;

7) количества заболевших во время эпидемии от времени, прошедшего с момента ее начала?



Рис. 72

31. Является ли периодическим следующее явление:
- 1) океанский прилив;
 - 2) восход Солнца;
 - 3) извержение гейзера;
 - 4) чемпионат России по футболу;
 - 5) Олимпийские Игры;
 - 6) отправление в Москву из Санкт-Петербурга фирменного поезда «Красная Стрела»;
 - 7) сокращение сердечной мышцы;
 - 8) подъем по лестнице с постоянной скоростью;
 - 9) тиканье часов;
 - 10) появление кометы Галлея (рис. 72);
 - 11) качка судна во время шторма (рис. 73);
 - 12) катание на карусели?



Рис. 73

32. Стоимость перевозки груза двумя видами транспорта выражается функциями: $y_1 = 150 + 50x$ и $y_2 = 250 + 25x$ соответственно, где x — расстояние перевозок, км; y — транспортные расходы. Определите, какой вид транспорта выгоднее для перевозок и начиная с какого расстояния.

33. Издержки при перевозке груза тремя видами транспорта соответственно вычисляются по формулам: $y_1 = 150 + 50x$, $y_2 = 250 + 35x$ и $y_3 = 350 + 45x$, где x — расстояние, км; y_1, y_2, y_3 — стоимость перевозки, р.

Найдите графически, на какие расстояния и каким видом транспорта перевозить груз экономичнее:

- всеми видами транспорта;
- вторым и третьим видами транспорта;
- первым и третьим видами транспорта.

Глава 8

Многогранники и круглые тела

Основные направления приложений: ■ Вычисление геометрических величин
 ■ Развитие наглядных представлений ■ Организация практических измерений

■ Вычисление геометрических величин

1. Через одну прямую проведены к шару две касательные плоскости (рис. 74). Известны радиус шара и расстояние между точками касания шара с этими плоскостями. Как найти угол между этими плоскостями? Как найти расстояние от шара до общей прямой этих плоскостей?

2. В данную сферу вписан цилиндр с известными размерами (рис. 75). Как найти расстояние от центра сферы до поверхности цилиндра?

3. Как найти радиус сферы, описанной около:

- куба с ребром 1;

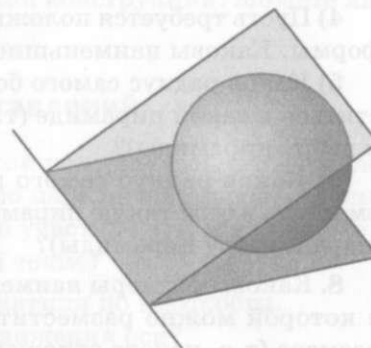


Рис. 74

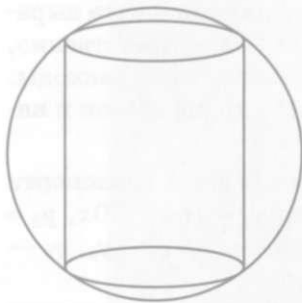


Рис. 75

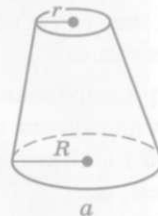
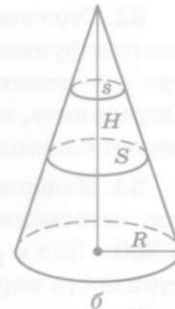


Рис. 76



- б) прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c ;
 в) правильной треугольной пирамиды с ребром 1?
 4. Пусть R и r — радиусы оснований усеченного конуса; L — его образующая (рис. 76, а). Как найти его высоту?

5. В конусе радиусом основания R и высотой H провели два сечения, параллельные основанию. Их площади S и s (рис. 76, б). Как найти расстояние h между этими сечениями?

6. Как найти радиус шара, вписанного в конус?

7. Рассмотрим правильную четырехугольную пирамиду, у которой все ребра равны.

1) Предположим, что у нас имеется такая емкость. Какое положение займет в ней самый длинный предмет (например, ручка), который может в ней уместиться?

2) Нарисуйте всевозможные тени, которые могут получиться при освещении пирамиды параллельным пучком света.

3) Нарисуйте развертку такой пирамиды (точнее, ее поверхности).

4) Пусть требуется положить пирамиду в коробку кубической формы. Каковы наименьшие размеры такой коробки?

5) Каков радиус самого большого шара, который может уместиться в такой пирамиде (т. е. каково отношение радиуса шара к ребру пирамиды)?

6) Каков радиус самого маленького шара, который может вместить в себя такую пирамиду (т. е. каково отношение радиуса шара к ребру пирамиды)?

8. Каковы размеры наименьшей коробки кубической формы, в которой можно разместить правильный тетраэдр заданного размера (т. е. каково отношение ребра куба к ребру правильного тетраэдра)?

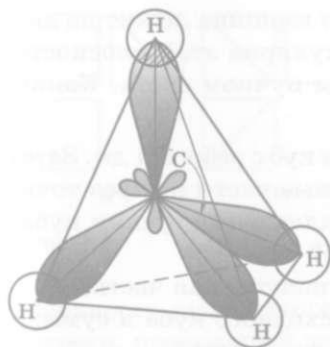


Рис. 77



Рис. 78

9. Каков радиус наибольшего шара, который уместится в правильном тетраэдре заданного размера (т.е. каково отношение радиуса шара к ребру правильного тетраэдра)?

10. Некоторые молекулы имеют форму правильного тетраэдра, в вершинах которого и в его центре находятся атомы (рис. 77). Какой угол при этом образуют между собой прямые, идущие от центра тетраэдра к его вершинам? (Центр правильного многогранника аналогичен центру правильного многоугольника. Он равноудален от всех его вершин, от всех его граней, а также от всех его ребер.)

11. «Колючки» для прокалывания шин автомобилей, а также противотанковые надолбы имеют ту же форму, которая описана в предыдущей задаче (рис. 78). Когда три вершины такой «колючки» находятся на плоском участке земли, отрезок, идущий от ее центра к четвертой вершине, располагается вертикально, что и приводит к эффективности такой конструкции. Можете ли вы это объяснить?

■ Развитие наглядных представлений

12. Муравей ползет по сферической поверхности. Сначала он прополз по меридиану вниз, затем по параллели направо, затем по меридиану вверх. Длина каждого участка пути одна и та же. Может ли он оказаться в начальной точке?

13. Закрепив вершину, конус покатали по плоскости.

а) Какая получается фигура от движения оси?

б) Пусть размеры конуса известны. Как вычислить путь, который проделает центр основания конуса за один оборот конуса?

14. Куб расположен так, что одна его вершина лежит на данной плоскости, а диагональ перпендикулярна этой плоскости. Данный куб освещается параллельным пучком света. Какова тень куба на этой плоскости?

15. Из некоторого материала вытесали куб с ребром 1 дм. Затем каждое его ребро разделили на две равные части и через точки деления провели плоские разрезы, параллельные граням куба.

- 1) На сколько частей разделился куб?
- 2) Что из себя представляет каждая полученная часть?
- 3) Сравните площадь поверхности исходного куба и суммарную площадь поверхности всех полученных частей.
- 4) Обобщите полученные результаты, когда число частей, на которое делят каждое ребро, произвольно.

16. На рис. 79, $a-d$ ломаная (каждый ее отрезок) идет по поверхности куба. Нарисуйте ломаную, также идущую по поверхности куба, которая симметрична данной относительно центра куба.

17. На рис. 80, $a-d$ даны три проекции ломаной, каждое звено которой соединяет две вершины куба. Нарисуйте три проекции ломаной, которая симметрична данной относительно центра куба.

18. На рис. 79 ломаная (каждый ее отрезок) идет по поверхности куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Нарисуйте ломаную, также идущую по по-

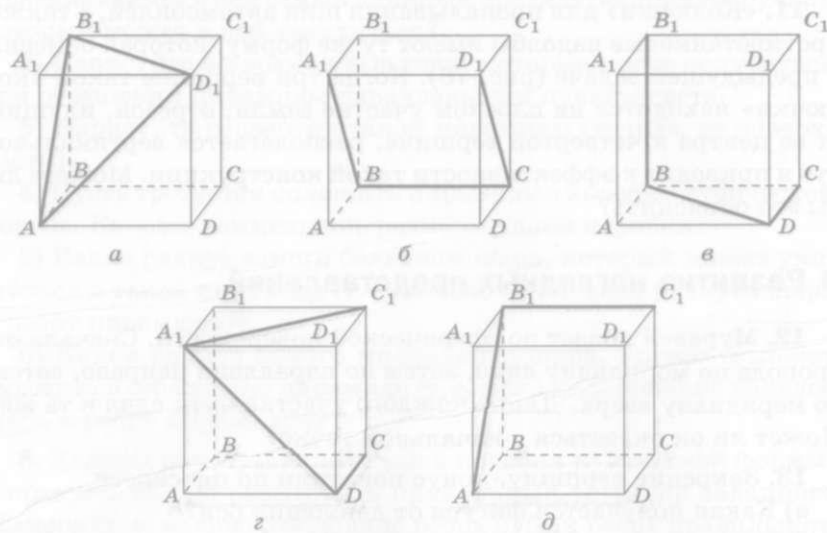


Рис. 79

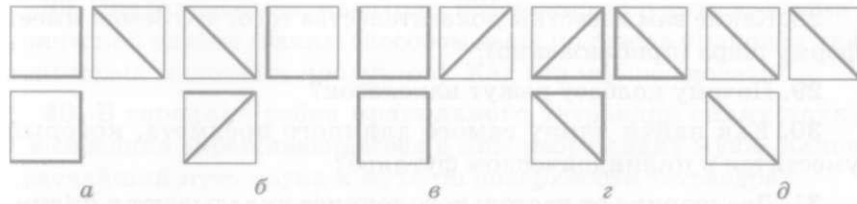


Рис. 80

верхности куба, которая симметрична данной относительно плоскости, проходящей через два параллельных ребра AA_1 и CC_1 .

19. Малышей учат готовить кубы из куска картона. Для этого лист картона требуется разметить так, чтобы затем из образовавшихся частей склеить куб (поверхность куба). Если такое получается, то нарисованный на картоне многоугольник называют разверткой куба. Нарисуйте различные развертки куба. (Предполагается, что склеивание частей развертки не требует дополнительного расхода материала.)

20. Кристалл имеет форму куба (в одном из горных музеев таков кристалл поваренной соли). Найдите его элементы симметрии (центр симметрии, плоскости симметрии, оси поворотной симметрии).

21. Правильный тетраэдр можно склеить из его развертки. Какими многоугольниками может быть развертка правильного тетраэдра?

22. Можно ли разбить правильный тетраэдр на правильные тетраэдры меньших размеров?

■ Организация практических измерений

23. Как найти длину шестидесятой параллели на Земле?

24. Какой путь проходит Санкт-Петербург за одни сутки вращения Земли? Принять широту Санкт-Петербурга равной 60° с. ш., а радиус Земли — 6 400 км.

25. Как вычислить радиус окружности, проведенной на реальном шаре?

26. Придумайте свой способ вычисления радиуса реального шара.

27. Из каких соображений футбольный мяч делают в форме шара (рис. 81)?



Рис. 81

28. Какие вам известны доказательства того, что Земля имеет форму шара (приближенно)?

29. Почему колбасу режут наискосок?

30. Как найти длину самого длинного предмета, который уместится в цилиндрическом футляре?

31. Два шарика от настольного тенниса укладывают в цилиндрический футляр. При каком условии это возможно?

32. Вам нужно выкатить бочку, которая стоит на полу, из помещения. Какие измерения необходимо выполнить?

33. Куб требуется осветить параллельными лучами снаружи так, чтобы он был освещен полностью. Какое минимальное число источников света вам понадобится?

34. Имеется два одинаковых куба — проволочный (точнее было бы назвать его каркасом куба) и деревянный. Можно ли в проволочном кубе найти такое отверстие, через которое мог бы пройти насквозь деревянный куб?

35. Требуется разместить в коробке кубической формы два равных шара. Каковы наименьшие размеры такой коробки? (Имеется в виду соотношение между искомым ребром коробки и радиусом данного шара.)

36. Можно ли определить длину диагонали спичечного коробка, ничего на нем не измеряя?

37. Пролезет ли правильный тетраэдр высотой 1 в щель, шириной меньше 1?

38. Некоторые кристаллы имеют форму бипирамиды, т. е. являются объединением двух правильных пирамид с общим основанием (рис. 82). Какие элементы симметрии (центр симметрии, плоскость симметрии, оси поворотной симметрии) имеет такой кристалл?

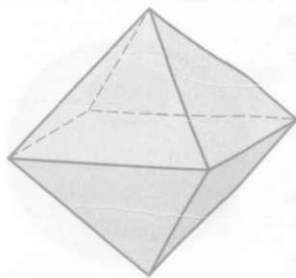


Рис. 82

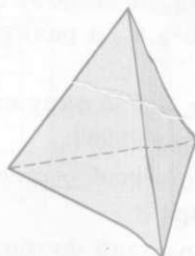


Рис. 83

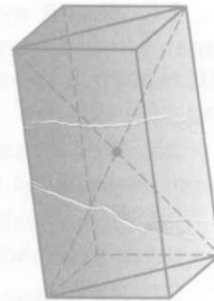


Рис. 84

39. Правильный тетраэдр (рис. 83) можно получить из цилиндрической трубки (таким способом была получена упаковка для некоторых молочных продуктов). Как это можно сделать?

40. В середине ребра правильного тетраэдра сидит паук, а в середине скрещивающегося с ним ребра сидит муха. Каков кратчайший путь паука к мухе по поверхности тетраэдра?

41. Бетонная плита в форме прямоугольного параллелепипеда данных размеров массой m прикреплена тросами к крюку подъемного крана (рис. 84). Длина тросов одинакова и равна l . Точки крепления тросов к плите находятся в углах верхнего основания размером $a \times b$. Какова сила натяжения тросов при равномерном ее подъеме?

Глава 9

Начала математического анализа

Основные направления приложений: ■ Экстремальные значения геометрических величин ■ Приложения к механике ■ Исследование физических процессов ■ Наглядное представление о производной

■ Экстремальные значения геометрических величин

1. Известно, что путь, пройденный свободно падающим телом, вычисляется по формуле $S = \frac{gt^2}{2}$, где S — путь, м; g — ускорение свободного падения ($g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$); t — время, с.

Найдите:

а) среднюю скорость тела за промежуток времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 5$ с;

б) скорость v тела в момент $t = 2$ с.

Покажите, что скорость v свободно падающего тела в любой момент времени вычисляется по формуле $v = gt$.

2. Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью v_0 , м/с.

Определите:

а) на какой высоте x он будет через t , с;

б) скорость и ускорение снаряда;

в) через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от поверхности земли.

3. Зависимость температуры T тела от времени t задана уравнением $T = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t = 10$ с?

4. Два тела движутся прямолинейно: одно по закону $S = t^3 + t^2 - 27t$, другое по закону $S = t^2 + 1$. Определите момент, когда скорости этих тел окажутся равными.

5. В шар радиуса R вписаны цилиндр и конус.

Используя имеющиеся данные, вычислите:

а) радиусы r оснований цилиндра и конуса, длину образующей конуса l как функцию расстояния от центра шара до основания;

б) высоту h , при которой площадь боковой поверхности конуса будет максимальной;

в) значение r , при котором площадь боковой поверхности цилиндра будет максимальной.

6. Один из углов треугольника равен 60° , отношение сторон, заключающих этот угол, равно t .

1) Вычислите отношение $k = k(t)$ суммы квадратов всех сторон треугольника к его площади.

2) Найдите наименьшее значение соотношения k .

3) Постройте график функции $k = k(t)$.

4) Решите неравенство $k(t) \leq \frac{16}{\sqrt{3}}$.

7. Параболическим сегментом называется фигура, ограниченная параболой и прямой, перпендикулярной оси параболы (рис. 85). Расстояние от вершины параболы до этой прямой называется высотой сегмента, а длина отрезка прямой, высекаемого параболой, — основанием сегмента. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в параболический сегмент с основанием a и высотой H ? (Одна из сторон прямоугольника параллельна оси параболы.)



Рис. 85

8. На странице книги печатный текст должен занимать 150 см^2 . Верхнее и нижнее поля страницы по 3 см , правое и левое — по 2 см . Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры $a \times b$ страницы?

9. В трапеции $ABCD$ длины сторон AB , BC и CD равны 1, причем $AD > BC$. Каким должен быть угол CDA , чтобы площадь трапеции была наибольшей?

10. Из всех прямоугольных треугольников с заданной суммой катетов найдите треугольник, у которого гипотенуза наименьшая.

11. Из всех прямоугольников, вписанных в данный полукруг радиуса R , найдите прямоугольник наибольшей площади.

12. Из круглого бревна надо выпилить балку прямоугольного сечения с наименьшими отходами. Как это сделать?

13. Прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием и заданной площадью поверхности имеет наибольший возможный объем. Докажите, что он является кубом.

14. Прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием и заданным объемом должен иметь наименьшую площадь поверхности. Докажите, что он должен быть кубом.

15. Открытый сосуд с квадратным дном при данной площади поверхности должен иметь наибольший объем. Докажите, что для этого ребро основания должно быть в два раза больше высоты сосуда.

16. Открытый сосуд с квадратным дном при данном объеме должен иметь наименьшую площадь поверхности. Докажите, что для этого ребро основания должно быть в два раза больше высоты сосуда.

17. Прямоугольный параллелепипед с данной высотой при данном объеме должен иметь наименьшую площадь поверхности. Докажите, что его основание должно быть квадратом.

18. Прямоугольный параллелепипед с данной высотой при данной площади поверхности должен иметь наибольший объем. Докажите, что его основание должно быть квадратом.

19. Из квадратного листа картона требуется сделать коробку наибольшей вместимости, вырезая по его углам равные квадратики и сгибая оставшуюся часть листа.

20. Требуется изготовить ящик (без крышки) с прямоугольным основанием и заданным объемом V , отношение сторон основания которого равно k . Каковы должны быть размеры ящика, чтобы его поверхность была наименьшей? Вычислите размеры ящика при следующих значениях:

а) $k = 1$, $V = 32$;

б) $k = 2$, $V = 36$.

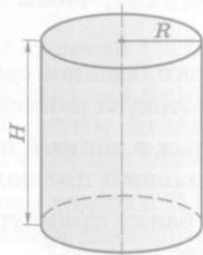


Рис. 86

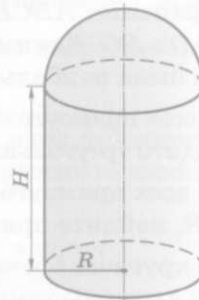


Рис. 87

21. Бак цилиндрической формы должен вмещать V литров воды. Каковы должны быть размеры бака, чтобы его поверхность (без крышки) была наименьшей?

22. Стоимость алмаза пропорциональна квадрату его массы (при прочих равных условиях). Найденный алмаз требуется разделить на две части. При каком делении будет наибольшая потеря стоимости?

23. Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь цилиндр, если его объем равен V (рис. 86)?

24. В основании пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой 2 см. Высота пирамиды равна 6 см. Найдите наибольший объем пирамиды.

25. Найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, у которой периметр боковой грани равен 6 см.

26. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром (рис. 87). Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь это тело, если его объем равен V ?

27. На двух стройплощадках возводятся два одноэтажных склада общей площадью 600 м^2 . Стоимость постройки склада прямо пропорциональна квадрату его площади. Кроме того, известно, что строительство 1 м^2 на второй площадке обходится на 40% дороже, чем на первой. Какой должна быть площадь каждого склада, чтобы стоимость строительства была наименьшей?

■ Приложения к механике

28. Высота камня, брошенного вертикально вверх со скоростью v_0 с начальной высоты от земли h_0 , меняется по закону

$h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения.

Используя указанные данные, найдите:

- зависимость скорости камня от времени $v(t)$;
- скорость камня через 2 с при $h_0 = 20 \text{ м}$, $v_0 = 8 \text{ м/с}$ (Зачем указано значение h_0 ? Через какое время камень упадет на землю?);
- высоту, на которой скорость станет равна нулю.

Покажите, что энергия камня $E = \frac{mv^2}{2} + mgh$ (где m — масса камня) не зависит от времени.

29. Движение точки по оси x задано законом $x(t) = \frac{10}{t}$. Найдите мгновенную скорость в моменты времени $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$. Обратите внимание на знак скорости.

30. Точка движется по закону $x(t) = 2 + 20t - 5t^2$. Найдите мгновенную скорость в моменты времени $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$. Постройте график зависимости мгновенной скорости от времени.

31. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 + 3t^2$. Найдите скорость и ускорение точки в момент времени $t = 1$.

32. В какой момент времени тело, движущееся прямолинейно по закону $x(t) = k\left(t + \frac{1}{t}\right)$, будет иметь минимальную кинетическую энергию?

33. Тело удаляется от Земли по закону $x(t) = A(t+c)^{\frac{2}{3}}$.

Используя указанный закон, найдите:

- закон, по которому изменяется скорость тела;
- ускорение тела.

Докажите, что сила, действующая на тело, меняется обратно пропорционально квадрату расстояния s .

34. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t + 2$.

Используя указанный закон, найдите:

- среднюю скорость на отрезках $[2; 2,2]$, $[2; 2,02]$, $[3; 4]$, $[3; 3,3]$;
- мгновенную скорость при $t = 2$, $t = 3$.

35. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2$.

Используя указанный закон, найдите:

- среднюю скорость на отрезках $[1; 2]$, $[1; 1,2]$, $[1; 1,02]$, $[2; 2,02]$;
- мгновенную скорость при $t = 1$, $t = 2$.

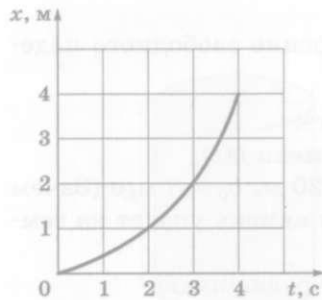


Рис. 88

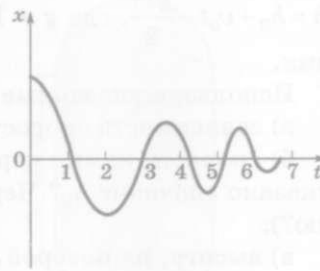


Рис. 89

36. Зависимость координаты от времени $x = x(t)$ задана графиком (рис. 88).

Используя график, найдите:

- среднюю скорость движения тела для отрезков времени $[0; 4]$, $[2; 4]$, $[3; 4]$, $[3,5; 4]$;
- мгновенную скорость в момент времени $t = 4$ с.

37. На рис. 89 изображен график зависимости координаты x от времени t .

Используя график, определите:

- на каких отрезках средняя скорость движения была наибольшей;
- в какой точке мгновенная скорость движения была наибольшей.

Приведите примеры:

- отрезков времени, на которых средние скорости одинаковы;
- моментов времени, в которые мгновенные скорости одинаковы.

38. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \sqrt{t}$. Докажите, что движение замедленное и что ускорение a пропорционально кубу скорости v .

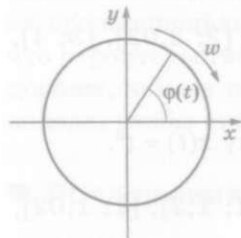


Рис. 90

39. Тело массой 5 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 3t + 2$, где t — время, с; x — координата, м. Найдите кинетическую энергию тела через 10 с после начала движения.

40. При равномерном движении тела по окружности угловой скоростью ω тела называется угол поворота $\varphi(t)$ в единицу

времени (рис. 90). Дайте определение угловой скорости для неравномерного движения.

41. Задан закон движения тела $x(t) = \frac{1}{4}t^4 - 2t^2 + 3$. Найдите моменты его остановки.

42. Тело движется по закону $x(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 2$. Найдите моменты времени, в которые равнодействующая сил, действующих на тело, равна нулю.

43. Дан закон движения тела как функция от времени: $x(t) = \frac{9}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1$. Считая массу тела равной 1, найдите зависимость положения тела x от действующей на него силы F .

■ Исследование физических процессов

44. Измерения заряда на обкладках конденсатора C (рис. 91) показали, что заряд q меняется со временем по закону $q(t) = 3,05 + 6,11t - \frac{0,8}{t+1}$ ($t \leq 10$, время — в секундах (с), заряд — в микрокулонах (мкК)). Найдите закон изменения силы тока.

45. Длина стержня меняется в зависимости от температуры по закону $l = l_0(1 + 0,001t + 0,0001t^2)$. Найдите коэффициент линейного расширения α при $t = 5^\circ\text{C}$.

46. При равномерном протекании заряда по проводнику силой тока I называется заряд Q , протекающий за единицу времени. Дайте определение силы тока в общем случае.

47. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента $t = 0$, задается формулой $q(t) = 3t^2 + t + 2$.

Найдите силу тока в момент времени $t = 3$.

48. В какие моменты времени ток в цепи равен нулю, если количество электричества, протекающего через проводник, задается формулой:

а) $q(t) = t + \frac{k}{t}$;

б) $q(t) = t - \sqrt{t} + 1$?

49. Пусть $Q(T)$ — количество теплоты, которое необходимо для нагревания 1 кг воды от 0°C до T (по Цельсию). Известно, что в диапазоне $Q \leq T \leq 95$

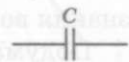


Рис. 91

формула $Q = 0,396T + 2,081 \cdot 10^{-3}T^2 - 5,024 \cdot 10^{-7}T^3$ дает хорошее приближение к истинному значению $Q(T)$.

Найдите, как зависит теплоемкость воды C от температуры.

50. Если бы процесс радиоактивного распада протекал равномерно, то под скоростью распада следовало бы понимать количество вещества, распавшегося в единицу времени. На самом деле процесс неравномерен.

Дайте определение скорости радиоактивного распада.

51. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч, составляет $(90 + 0,4v^2)$ руб./ч. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

Указание: Сначала определите зависимость стоимости 1 км пути от скорости.

52. Квадратная рамка со стороной $a = 50$ см помещена в магнитное поле $B = 0,1$ Тл, направленное перпендикулярно плоскости рамки. Рамку начинают равномерно вращать с угловой скоростью $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$ вокруг оси, совпадающей с одной из сторон квадрата. Каков характер изменения ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в рамке? Чему равно максимальное значение ЭДС?

Указание: ЭДС электромагнитной индукции определяется скоростью изменения магнитного потока через рамку, который равен произведению B на площадь рамки и косинус угла между направлением магнитного поля и нормалью к рамке.

53. Сколько листового железа с одинаковыми диаметром и высотой требуется для изготовления цилиндрической цистерны объемом 20 м^3 ?

54*. В два различных сосуда налиты одинаковые растворы соли, причем в первый сосуд — 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором — в q раз. Известно, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов?

■ Наглядное представление о производной

55. Обсуждая успехи своего ученика, учитель сказал: «Он очень мало знает, но у него положительная производная». Это значит, что скорость приращения знаний у ученика положительна и его знания возрастают.

Подумайте, чем отличаются три кривые роста знаний, изображенные на рис. 92.

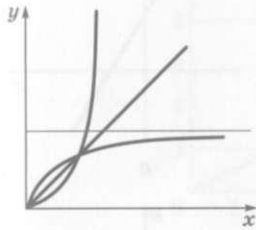


Рис. 92

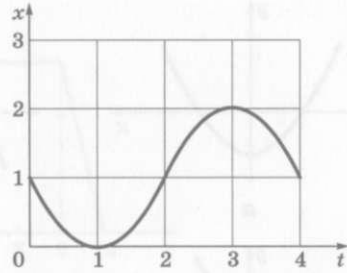


Рис. 93

56. Зависимость координаты x от времени t задана графиком (рис. 93).

Найдите среднюю скорость движения на следующих отрезках времени: $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 4]$, $[0; 2]$, $[2; 4]$, $[0; 4]$.

57. По графику зависимости координаты x от времени t вычислите скорость в моменты времени $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ (рис. 94).

Постройте график зависимости скорости от времени.

58. На графике изображена зависимость координаты тела от времени t в случае упругого удара t_y (рис. 95).

Постройте график зависимости скорости от времени.

59. Объедините графики, представленные на рис. 96, $a - e$, в пары «функция — ее производная».

60. По заданному графику функции (рис. 97, $a - e$) постройте график ее производной.

61. На рис. 98 изображен алгоритм построения графика скорости по графику пути.

Разберите этот алгоритм по рисунку и примените его для построения графиков производной для функций, изображенных на рис. 99, $a - e$.

Попробуйте дать обоснование алгоритма.

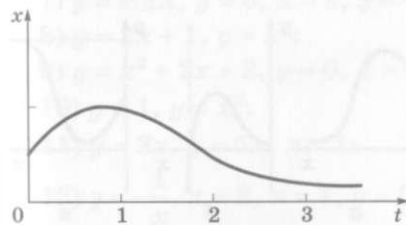


Рис. 94

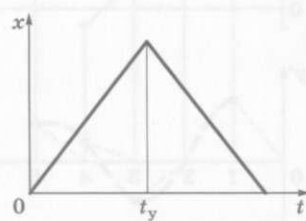


Рис. 95

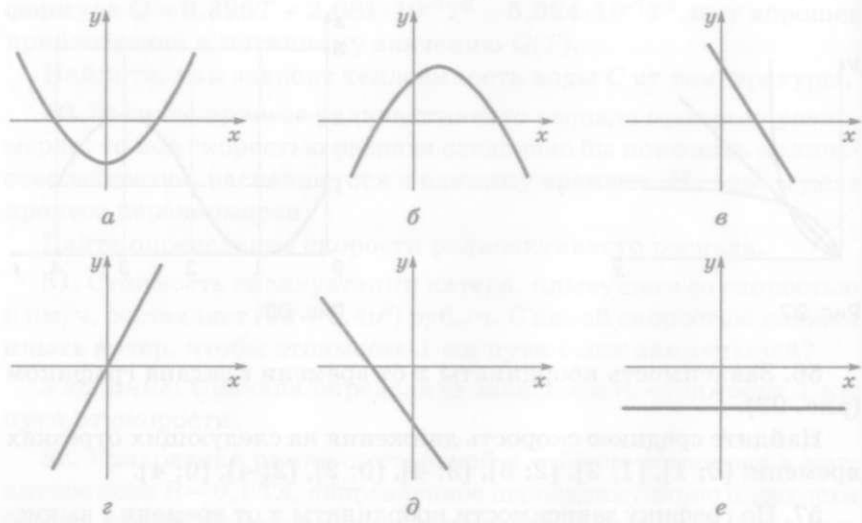


Рис. 96

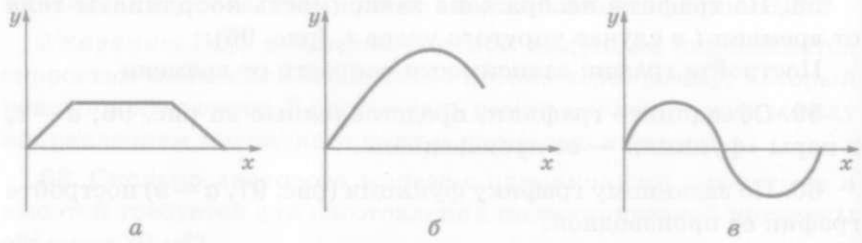


Рис. 97

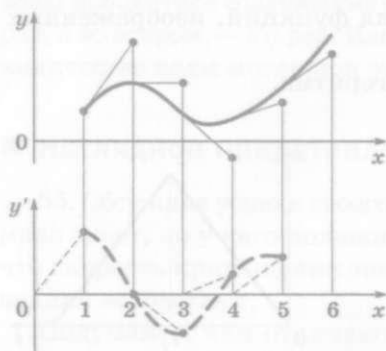


Рис. 98

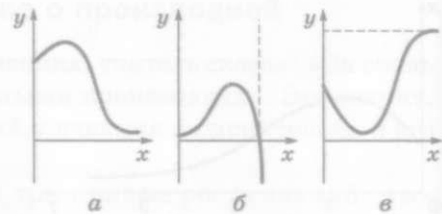


Рис. 99

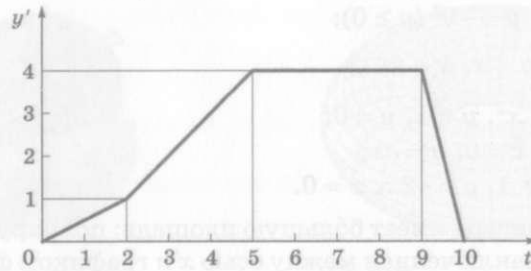


Рис. 100

62. По заданному графику производной (рис. 100) восстановите примерный график функции.

Глава 10

Интеграл и его применение

Основные направления приложений: ■ Вычисление площадей и объемов
 ■ Интеграл в физике ■ Наглядные представления об интеграле

■ Вычисление площадей и объемов

1. Вычислите площади фигур, ограниченных графиками следующих функций:

1) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

2) $y = x^2$, $y = 2x$;

3) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

4) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$;

5) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x$;

6) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{4}$;

7) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$;

8) $y = 2x + 1$, $y = x^2$;

9) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

10) $y = 1$, $y = x^2$;

11) $y = 2x$, $y = 5x$, $x = 1$;

12) $y = -\frac{1}{x}$, $x = 2$, $x = 1$, $y = 0$;

13) $y = 2 - x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$;

14) $y = -x, y = -x^3 (y \geq 0)$;

15) $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2$;

16) $y = 2 - x^2, y = x, y = 0$;

17) $y = e^x, x = 0, y = ex$;

18) $y = x^2 + 1, y = -2x, x = 0$.

2. Какая фигура имеет бóльшую площадь: полукруг радиуса 1 или фигура, заключенная между осью x и графиком функции $y = 1 - x^4$ на промежутке $[-1; 1]$?

3. Чему равна производная площади круга как функции от радиуса?

Как получить эту формулу из определения производной?

4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями:

а) $y \geq x^2, x \geq y^2$;

б) $15 - 7x \leq y \leq 7 - 3x, y \geq 0$.

5. По полуокружности радиуса R скользит фигура так, что ее плоскость перпендикулярна диаметру этой полуокружности.

Изобразите получающееся тело и найдите его объем, если фигура является:

а) квадратом со стороной a ;

б) правильным треугольником со стороной a ;

в) окружностью радиуса r .

6. Плитка в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2 см и толщиной 0,7 см изготовлена из дерева плотностью 0,5 г/см³.

Найдите массу деревянной плитки.

7. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b двумя способами сворачивают в цилиндр (рис. 101).

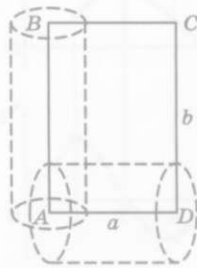


Рис. 101

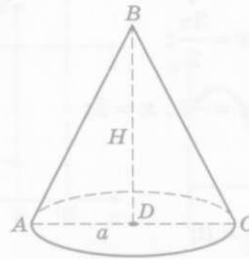


Рис. 102

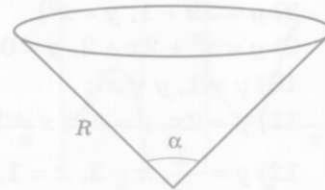


Рис. 103

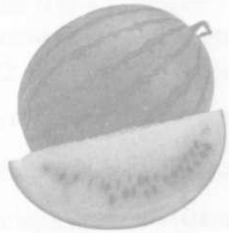


Рис. 104

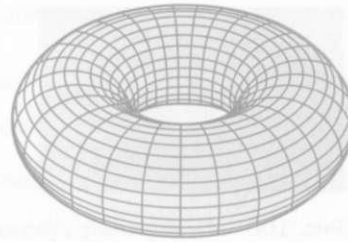


Рис. 105

Найдите площади боковых и полных поверхностей полученных цилиндров.

8. Найдите площади боковой и полной поверхностей конуса, полученного вращением вокруг высоты равнобедренного треугольника ABC с основанием a и высотой H (рис. 102).

9. Воронка имеет вид конуса, свернутого из кругового сектора радиусом R и центральным углом α (рис. 103).

Найдите площади боковой и полной поверхностей конуса.

10. Что бы вы предпочли: съесть некий арбуз вчетвером или съесть вдвое больший арбуз (по обхвату) восьмером (рис. 104)?

11. Два равных мыльных пузыря слиплись в один большой мыльный пузырь.

Сравните площадь поверхности большого пузыря с суммарной площадью поверхности исходных пузырей.

12. Из полушара выточили: а) цилиндр, б) конус наибольшего объема.

Какой процент материала пошел в отходы, если основания цилиндра и конуса лежат на основании полушара?

13. Почему выгоднее покупать крупный картофель, а не мелкий? (Считаем и те, и другие картофелины, имеющими форму шара.)

14. Вычислите объем бублика, у которого известны внутренний и внешний радиусы (рис. 105)?

15. Определите силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 8 м и высотой 6 м.

■ Интеграл в физике

16. Вычислите перемещение точки за указанный промежуток времени $[t_1; t_2]$ по заданной скорости $v = v(t)$:



Рис. 106



Рис. 107

- 1) $v(t) = 3t^2 - 2t + 3, t_1 = 1, t_2 = 3;$
- 2) $v(t) = 3\sqrt{t} - 4t + 1, t_1 = 1, t_2 = 4;$
- 3) $v(t) = 3\sqrt[3]{t} + 2^t, t_1 = 0, t_2 = 8;$
- 4) $v(t) = 3t^2 + \sqrt{t} - 2, t_1 = 0, t_2 = 1;$
- 5) $v(t) = \left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)^2, t_1 = 1, t_2 = 2;$
- 6) $v(t) = 2\sqrt[3]{t^2} + 3\sqrt[4]{t^3}, t_1 = 0, t_2 = 1;$
- 7) $v(t) = \sin t + 2 \cos t, t_1 = \frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{\pi}{4};$
- 8) $v(t) = e^{t+2}, t_1 = 0, t_2 = 2;$
- 9) $v(t) = 2^t \cdot 3^{-t}, t_1 = 0, t_2 = 1.$

17. Из цистерны, имеющей форму прямого кругового конуса радиусом основания R и высотой H , выкачивают воду через вершину конуса. Найдите совершаемую при этом работу, если $R = 3$ м; $H = 5$ м; плотность воды $\rho = 1$ г/см³.

18. Найдите работу, совершенную при постройке великой египетской пирамиды — пирамиды Хефрена, имеющей высоту 215 м и сторону основания 143,5 м (рис. 106). Ответ дайте в джоулях (Дж) и в тонно-километрах (т-км). Плотность камня, из которого строилась пирамида, равна 3 т/м³.

19. Два точечных электрических заряда $Q_1 = +10^{-4}$ и $Q_2 = -10^{-4}$ Кл находятся на расстоянии 10 см друг от друга в вакууме (рис. 107). Найдите работу, необходимую для того, чтобы развести заряды на расстояние 10 км.

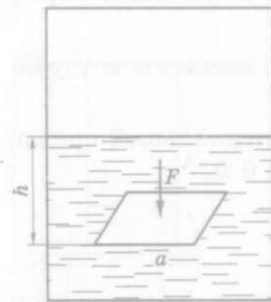


Рис. 108

20. Вычислите силу давления воды на квадратную пластину со стороной a , погруженную в воду перпендикулярно ее поверхности, считая, что верхнее основание пластины находится на расстоянии h от поверхности воды (рис. 108).

21. Найдите количество теплоты, выделяемое переменным синусоидальным

током $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \alpha)$ в течение одного периода времени в проводнике сопротивлением R .

22. Точка движется по оси абсцисс так, что скорость ее в произвольный момент времени t задается формулой $v(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Найдите положение точки в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$, если в момент времени $t = \frac{\pi}{4}$ она имела абсциссу, равную -1 .

23. Найдите силу гравитационного взаимодействия между расположенными на одной прямой материальной точкой массой m и однородным стержнем длиной l и массой m . Расстояние от точки до ближайшего конца стержня равно l .

24. Период полураспада радиоактивного вещества равен $4,4 \cdot 10^9$ лет.

Через сколько лет останется 99,99 % исходного количества радиоактивного вещества?

25. Напишите закон радиоактивного распада, если известно, что при $t = t_0$ масса вещества $m(t_0) = m_0$.

26. Скорость роста дрожжей пропорциональна их массе.

Найдите зависимость массы дрожжей от времени, если известно, что при $t = 0$ их масса была равна m .

27. Найдите коэффициент пропорциональности в предыдущей задаче, если известно, что прирост дрожжей через 2 ч больше, чем прирост за первый час, на 11 кг, а начальное количество дрожжей составляет 100 кг.

■ Наглядные представления об интеграле

28. Постройте на клетчатой бумаге систему координат с масштабом «две клетки — единица длины». Найдите приближенные значения следующих интегралов, построив графики подынтегральных функций и вычислив площади подграфика «по клеткам»:

а) $\int_0^{10} 0,1x^2 dx$;

б) $\int_1^{10} \frac{10}{x} dx$;

в) $\int_0^{10} \sin \frac{\pi x}{10} dx$.

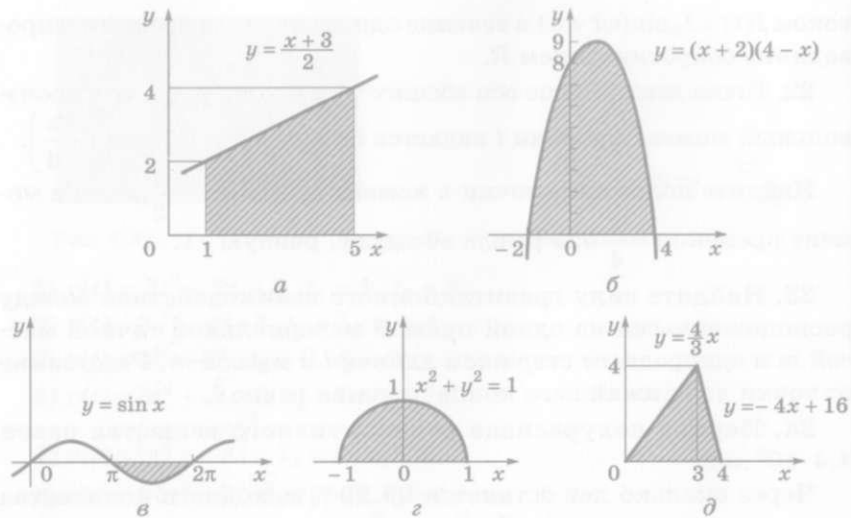


Рис. 109

29. Нарисуйте фигуры, площади которых равны следующим интегралам:

а) $\int_0^2 x^2 dx$;

б) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$;

в) $\int_0^{\pi} \sin x dx$;

г) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

30. Запишите с помощью интегралов формулы для определения площади фигур, изображенных на рис. 109, а — д.

31. Укажите соответствие между графиками функции и ее первообразной (рис. 110, а — м).

32. Для функций, графики которых изображены на рис. 111, а и б, постройте графики функций $y = y(x)$, задающих переменную площадь подграфика.

33. На рис. 112, а — г изображено несколько фигур.

Введите на плоскости систему координат, разбейте границу каждой фигуры так, чтобы куски могли быть графиками каких-

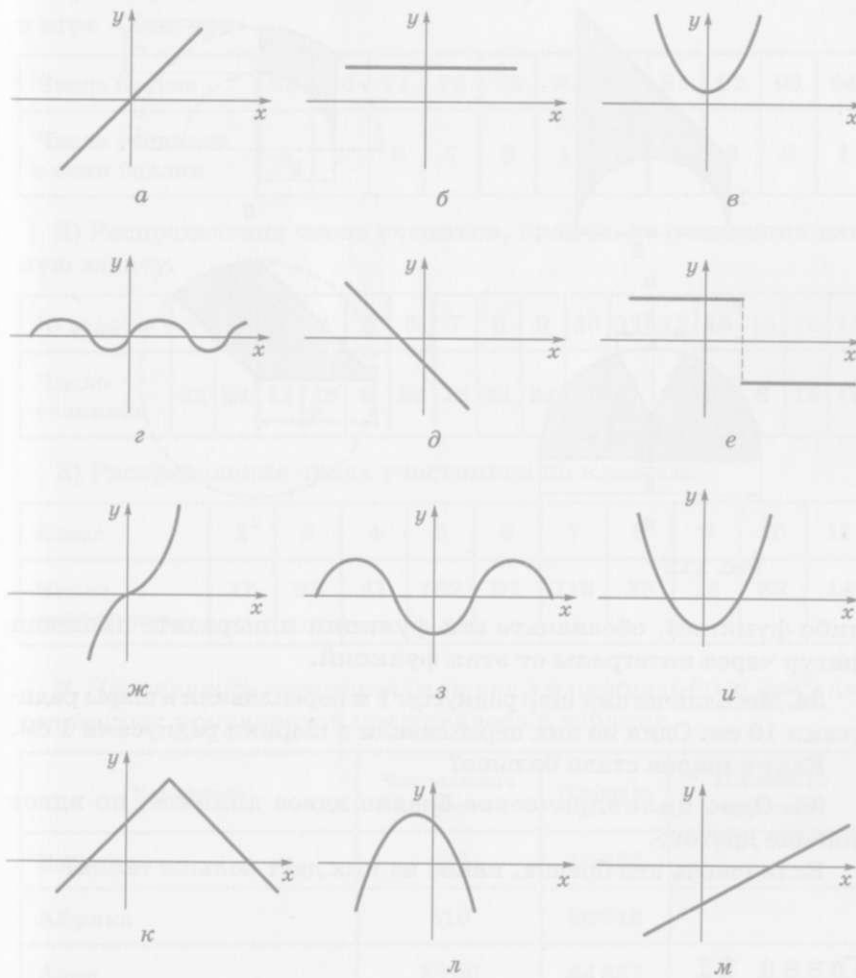


Рис. 110

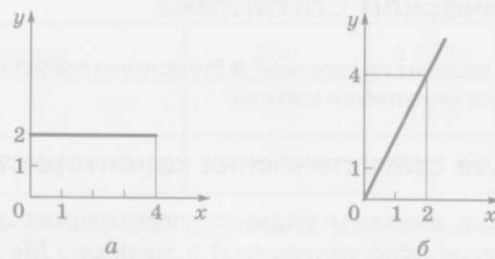


Рис. 111

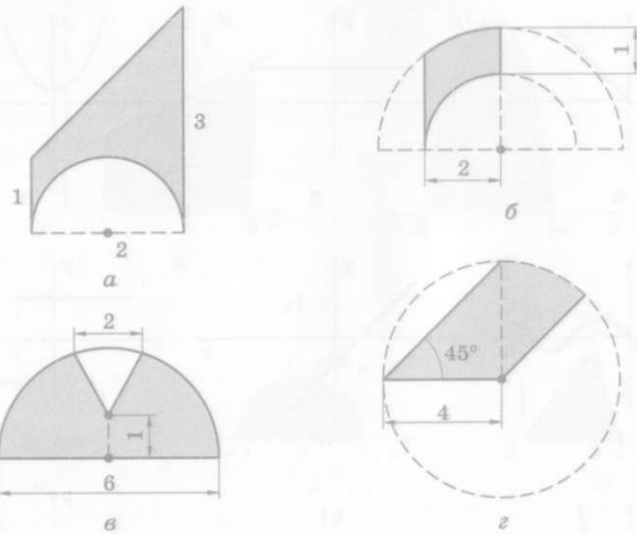


Рис. 112

либо функций, обозначьте эти функции и выразите площади фигур через интегралы от этих функций.

34. Металлический шар радиусом 1 м переплавили в шары радиусами 10 см. Один из них переплавили в шарики радиусами 1 см. Каких шаров стало больше?

35. Одно цилиндрическое бревно вдвое длиннее, но вдвое тоньше другого.

Если сжечь эти бревна, какое из них даст больше тепла?

Глава 11

Элементы теории вероятностей и математической статистики

Основные направления приложений: ■ Вычисление статистических характеристик ■ Оценка вероятности события

■ Вычисление статистических характеристик

1. В таблицах указаны ряды статистических данных. Вычислите средние арифметические A и медианы Me для каждого из этих рядов.

1) Распределение числа баллов, набранных учениками класса в игре «Кенгуру».

Число баллов	83	70	71	76	78	80	81	85	92	93	94
Число учеников с этим баллом	4	1	5	7	2	4	1	2	3	0	1

2) Распределение числа учеников, правильно решивших данную задачу.

№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Число учеников	32	24	11	38	6	20	16	31	32	24	8	2	24	8	16	18

3) Распределение числа участников по классам.

Класс	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Число участников	12	63	41	102	94	116	35	74	82	14

2. Численность населения (млн чел.) и площадь (тыс. км²) для различных континентов представлена в таблице.

Континент	Численность населения	Площадь	Плотность населения
Европа	685	10 532	
Африка	510	30 319	
Азия	2 700	44 387	
Северная и Центральная Америка	390	24 249	
Южная Америка	260	17 832	
Австралия	25	8 510	
Все континенты			

Вычислите среднюю плотность населения (с точностью до 1 чел./км²) для различных континентов и в целом на планете.

3. Перед вами первые 100 знаков после запятой в десятичной записи числа π :

$\pi = 3,1415926535897932384626433$
 8327950288419716939937510
 5820974944592307816406286
 2089986280348253421170679

Используя данную запись, вычислите:

- а) сколько раз появляется каждая цифра;
- б) средние значения для частоты четных и нечетных цифр.

4. На рис. 113 изображена гистограмма числа учащихся, получивших данную оценку.

Какие из утверждений, приведенных в таблице, верны?

№ п/п	Утверждение	Да/нет
1	Общее число учащихся равно 20	
2	Частота оценки 2 равна 25 %	
3	Наиболее частая оценка — 4	
4	Медиана равна 3	
5	Средний балл равен 2,6	
6	Если увеличить все оценки на один балл, то средний балл увеличится на 1	
7	Если всем получившим единицу поставить двойку, то средний балл возрастет на 0,2	
8	Невозможно выполнить требование директора, чтобы каждый ученик имел оценку выше среднего балла	

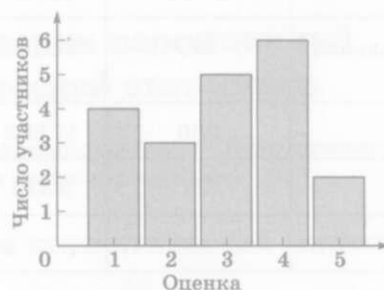


Рис. 113

5. При обработке статистических данных используются характеристики, для расчета которых применяют следующие формулы:

- среднее арифметическое

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n};$$

- среднее геометрическое

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n};$$

- среднее квадратичное

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}};$$

- среднее гармоническое

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1}.$$

Вычислите эти средние значения для рядов чисел, указанных в таблице.

№ п/п	n	Ряд чисел	H_n	G_n	A_n	Q_n
1	2	1; 2				
2	2	1; 100				
3	3	5; 5; 5				
4	3	1; 2; 4				
5	4	1; 2; 3; 8				

■ Оценка вероятности события

6. Монету подбрасывают подряд 10 раз.

Докажите, что вероятность того, что все 10 раз выпадет «орел», меньше одной тысячной.

7. Ученик случайным образом отвечает на вопросы пяти тестов. Для каждого теста указано четыре ответа, из которых один точно верен.

Докажите, что вероятность того, что ученик угадает ответы точно в трех тестах, меньше одной десятой.



Рис. 114

8. Из колоды в 36 карт случайным образом выбирается четыре карты (рис. 114).

Докажите, что вероятность того, что все они одной масти, меньше одной сотой.

9. Где вероятнее угадать пять номеров — в лотерее «5 из 36» или в лотерее «6 из 49»?

10. Оцените вероятность того, что из десяти учеников ни у кого день рождения не приходится на январь. (Считать, что вероятности для каждого месяца равны между собой.)

11. Бросаются два игральных кубика.

Какая сумма выпавших очков наиболее вероятна?

12. Монету бросают 10 раз: 9 раз выпал «орел». Какова вероятность того, что в десятый раз выпадет «орел»?

13. Ихтиологи хотят оценить примерное число рыб в закрытом водоеме. Для этого они выловили 40 рыб, поместили их и отпустили обратно. Затем они выловили 50 рыб и среди них оказалось 18 помеченных (рис. 115).

Каково примерное число рыб в водоеме?

14. За праздничным круглым столом в компании из 10 человек Вася и Маня хотят сесть рядом.

Какова вероятность этого события, если рассадка происходит случайным образом?



Рис. 115

15. В домашней новогодней лотерее выпущено 10 билетов: пять из них — выигрышные. Сын Вася «купил» два билета.

Какова вероятность того, что хотя бы один из них будет выигрышным?

16. Два равных по силе шахматиста играют матч, причем ничьи не учитываются.

Что вероятнее для одного из них: выиграть три партии из четырех или пять партий из восьми?

17. Ученик подготовил 20 билетов из 25. У него есть возможность на экзамене вытащить билет первым или вторым.

В каком случае вероятность вытащить известный билет больше?

18. В квартире четыре лампочки. Для каждой из них вероятность того, что она останется исправной (в течение года), равна $\frac{5}{6}$.

Какова вероятность того, что в течение года придется заменить:

- а) одну лампочку;
- б) две лампочки;
- в) три лампочки;
- г) все лампочки;
- д) не меньше половины лампочек?

19. Вычислите с помощью микрокалькулятора значения следующих числовых выражений:

а) число «счастливых» автобусных билетов:

$$\frac{32}{5} \cdot \frac{31}{4} \cdot \frac{30}{3} \cdot \frac{29}{2} \cdot \frac{28}{1} - 6 \cdot \frac{22}{5} \cdot \frac{21}{4} \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{19}{2} \cdot \frac{18}{1} + 15 \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{8}{1};$$

б) вероятность того, что в классе из 30 человек есть совпадающие дни рождения:

$$\left(1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{336}{365}\right) \cdot 100\%.$$

20. Из букв слова «уравнение» наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что:

- а) эта буква будет гласной;
- б) согласной;
- в) это будет буква «щ»?

21. В ящике имеются четыре белых и семь черных шаров.

Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым?

22. В ящике 90 стандартных и 10 нестандартных деталей.

Какова вероятность того, что среди 10 наугад вынутых деталей бракованных не окажется?

23. Замок содержит на общей оси четыре диска, каждый из которых разделен на шесть секторов, отмеченных цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, если все диски занимают



Рис. 116

определенные положения относительно корпуса замка, их цифры образуют определенное число, составляющее «секрет» замка.

Какова вероятность открыть замок, установив произвольную комбинацию цифр?

24. Военный летчик получил задание уничтожить три рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета бомба (рис. 116). Вероятность попадания в первый склад 0,01, во второй — 0,008, в третий — 0,025. Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв и остальных складов. Какова вероятность того, что склады противника будут уничтожены?

25. Вероятность того, что при пуске стартера двигатель автомобиля заработает, равна $\frac{5}{6}$.

Чему равна вероятность того, что для запуска двигателя стартер не понадобится включать более двух раз?

26. В телевизоре 10 ламп. Для любой из ламп вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна p .

Какова вероятность того, что:

- а) в течение года хотя бы одна лампа выйдет из строя;
- б) в течение года выйдет из строя ровно одна лампа;
- в) в течение года выйдут из строя две лампы?

27. В квартире используют четыре электрические лампочки. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна p .

Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не меньше половины лампочек?

Уравнения и неравенства

Основные направления приложений: ■ Построение математической модели и ее исследование (текстовые задачи) ■ Развитие логического мышления при решении уравнений и неравенств ■ Геометрические модели

■ Построение математической модели и ее исследование (текстовые задачи)

1. Решите задачи на составление уравнений.

1) Поезд должен был преодолеть расстояние в 200 км, однако из-за ремонта дороги он был вынужден выбрать другой путь — на 100 км длиннее первого. При этом он увеличил скорость на 30 км/ч, но все же опоздал по сравнению с расписанием на 20 мин.

Каково расчетное время движения поезда по расписанию?

2) Два автомобиля выехали одновременно с перекрестка двух дорог, идущих по взаимно перпендикулярным направлениям. Через два часа расстояние между ними было 400 км. Скорость одного из автомобилей была на 40 км/ч больше второго.

С какими скоростями двигались автомобили?

3) Вода вливалась в бассейн через две трубы, которые работали совместно два часа, после чего одна из них была закрыта, а вторая работала еще 1 ч 20 мин и наполнила бассейн. Отдельно работая, вторая труба наполняет весь бассейн на 1 ч 10 мин дольше первой.

За какое время наполняет бассейн каждая из труб, работая отдельно?

4) Два пешехода вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились через 3 ч.

За какое время пройдет все расстояние каждый, если первый пришел в пункт B на 2,5 ч позже, чем второй пришел в пункт A ?

5) Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3.

Из скольких частей обоих сплавов можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

6) Совхозом было заготовлено на зиму m [т] кормов для скота, но n голов скота отправили в соседнюю область и вследствие этого норма кормов на голову скота увеличилась на c [т].

Сколько тонн кормов предполагалось расходовать на голову скота ранее?

7) Открытая с обоих концов цилиндрическая трубка длиной l [мм] наполовину погружена в ртуть. Закрыв верхний конец трубки, ее вынимают, при этом часть ртути вытекает. Какой длины столбик ртути останется в трубке, если во время этого опыта атмосферное давление равно H [мм рт. ст.]?

8) Между освещенным предметом и находящимся на расстоянии d от него экраном требуется поместить выпуклую линзу так, чтобы получить на экране четкое изображение этого предмета. Фокусное расстояние линзы равно F .

На каком расстоянии от предмета следует поместить линзу?

9) Производительность станка-автомата A составляет 10 ед. продукции в час. Конструируются еще два станка-автомата того же назначения: станок B и станок C , причем поставлено требование, чтобы производительность станка B составляла не менее 75 % суммарной производительности станков A и C , производительность станка C — не менее 50 % суммарной производительности станков A и B .

Какой должна быть минимальная производительность станков B и C ?

2. Старинные задачи, приводящиеся к квадратным уравнениям. Следующие задачи взяты из школьных задачников XIX в. с сохранением их стиля.

1) Некто имеет несколько телят, которые стоят 112 рублей. Если бы телят было двумя более, то каждый теленок стоил бы 2 рублями 80 коп. дешевле. Сколько было телят?

2) Два каменщика, из которых второй начинает работать $1\frac{1}{2}$ днями позже первого, могут выложить стену в 7 дней. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то первому для ее окончания понадобилось бы тремя днями более, чем второму. Во сколько дней каждый из них отдельно выстроит эту стену?

3) Некто из бочки, содержащей 81 ведро вина, отлил некоторое число ведер, а бочку долил водой; потом от этой смеси он отлил столько же ведер, сколько и в первый раз, и опять бочку долил водой; сделав это 4 раза, в бочке осталось только 16 ведер чистого вина. По сколько ведер он отливал?

4) Два путешественника A и B отправляются одновременно в город, находящийся от них на расстоянии 90 верст; A делает в час на одну версту более, чем B , и прибывает в город ранее его

часом. Сколько верст проходит каждый из путешественников в один час?

■ Развитие логического мышления при решении уравнений и неравенств

3. Важнейшим применением логики в школьной практике является исследование уравнений и неравенств. В предлагаемых задачах формулируются некоторые свойства уравнений и неравенств. Их надо либо доказать, либо опровергнуть, приведя соответствующий пример.

1) Линейное уравнение либо имеет один корень, либо не имеет их вовсе.

2) Если квадратное уравнение не имеет вещественных корней, то его дискриминант отрицателен.

3) Уравнение $|x - a| = 1$ при всяком a имеет хотя бы одно решение.

4) Уравнение $|x - 1| = a$ при всяком a имеет хотя бы одно решение.

5) Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет вещественные корни, то таким же свойством обладает и уравнение $cx^2 + bx + a = 0$.

6) Всякий корень уравнения $\sqrt{x-1} = x$ положителен.

7) Всякий корень уравнения $\sqrt{x-1} = x$ отрицателен.

8) Уравнение $\sqrt{x-a} = x$ ни при каком a не может иметь отрицательных корней.

9) Если $x = 0$ не является корнем уравнения $f(x) = 0$, то это уравнение равносильно уравнению $\frac{f(x)}{x} = 0$.

10) При возведении обеих частей уравнения в квадрат не может произойти потери корней, но могут появиться лишние корни.

4. Для каждой пары уравнений (1) и (2) ответьте на следующие вопросы:

а) правда ли, что $(1) \Rightarrow (2)$;

б) правда ли, что $(2) \Rightarrow (1)$;

в) правда ли, что $(1) \Leftrightarrow (2)$?

(1)	(2)
1) $x - 3 + \sqrt{x} = 2x + \sqrt{x}$;	$x - 3 = 2x$;
2) $x^2 - 3x + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} - 2$;	$x^2 - 3x = -2$;
3) $x + 6 + \ln x = 3x + \ln x$;	$x + 6 = 3x$;
4) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$;	$x^2 - 3x + 2 = 0$;

(1)	(2)
5) $\frac{x^2-1}{x-1} = 0;$	$x^2 - 1 = 0;$
6) $\frac{(x-1)^2(x+1)}{x-1} = 0;$	$(x-1)(x+1) = 0;$
7) $(x-3)(x+1) = (5x-4)(x+1);$	$x-3 = 5x-4;$
8) $x^2 = 9;$	$ x = 3;$
9) $e^{2x} = (1+x^2)^2;$	$e^x = 1+x^2;$
10) $x^2 + 2x + 1 = 4;$	$x + 1 = 2;$
11) $\sqrt{x^2-1} = 1;$	$x^2 - 1 = 1;$
12) $\sqrt{x} = \sqrt{2x+1};$	$x = 2x + 1;$
13) $\sqrt{1-x} = \sqrt{2x};$	$1-x = 2x;$
14) $\sin x + \cos x = 1;$	$(\sin x + \cos x)^2 = 1;$
15) $\log_2(x+2) = \log_2(3-x);$	$x+2 = 3-x;$
16) $\ln(x+1) + \ln(2-x) = 0;$	$\ln(x+1)(2-x) = 0;$
17) $\log_2(x(x+9)) + \log_2 \frac{x+9}{2} = 0;$	$2 \log_2(x+9) = 0;$
18) $x^2 = 2^{x+1};$	$2 \ln x = (x+1) \ln 2;$
19) $x + 3 = 7 - x;$	$\ln(x+3) = \ln(7-x);$
20) $\arcsin x = 1;$	$x = \sin 1.$

5. Докажите или опровергните следующие утверждения:

1) линейная система двух уравнений с двумя неизвестными может иметь ровно два решения;

2) если линейная система двух уравнений с двумя неизвестными имеет хотя бы одно решение, то это решение единственно;

3) если линейная система двух уравнений с двумя неизвестными имеет два различных решения, то она имеет бесконечное множество решений;

4) система уравнений вида $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = a \end{cases}$ может иметь не более двух решений;

5) если в системе двух уравнений одно из них заменить их суммой, то получится система, равносильная исходной.

6. Докажите следующие утверждения или приведите опровергающий пример:

1) если умножить обе части неравенства на выражение, не обращающееся в нуль, то получим неравенство, равносильное исходному;

- 2) неравенство $f - g > 0$ равносильно неравенству $g - f < 0$;
- 3) неравенство $f > 1$ равносильно неравенству $\frac{1}{f} < 1$;
- 4) при возведении неравенства в квадрат могут как потеряться, так и появиться новые решения;
- 5) неравенство $f < g$ равносильно неравенству $2^f < 2^g$;
- 6) неравенства $\frac{x}{x+1} > 0$ и $\frac{x+1}{x} > 0$ равносильны;
- 7) всякое решение неравенства $x - 1 < 0$ является решением неравенства $x(x - 1) < 0$;
- 8) если неравенство $x^2 + x + a < 0$ имеет решения, то $a < 0$.

7. Для каждой пары неравенств (1) и (2) ответьте на следующие вопросы:

- а) правда ли, что (1) \Rightarrow (2);
 б) правда ли, что (2) \Rightarrow (1);
 в) правда ли, что (1) \Leftrightarrow (2)?

(1)	(2)
1) $x + 3 - \frac{1}{x+7} < 2 - \frac{1}{x+7}$;	$x + 3 < 2$;
2) $2x - 3 - \frac{1}{x-5} < x - 4 - \frac{1}{x-5}$;	$2x - 3 < x - 4$;
3) $5x - 6 + \sqrt{x} < 3x + \sqrt{x}$;	$5x - 6 < 3x$;
4) $x - \ln(1 - x^2) \leq 2x + 3 - \ln(1 - x^2)$;	$x \leq 2x + 3$;
5) $6x + \ln(1 - x) < 6 + \ln(1 - x)$;	$6x < 6$;
6) $\frac{x-3}{x+1} > 1$;	$x - 3 > x + 1$;
7) $\frac{x-2}{x^2+1} < 1$;	$x - 2 < x^2 + 1$;
8) $\frac{x+3}{\sin x - 2} < 1$;	$x + 3 > \sin x - 2$;
9) $\frac{(x-2)^2(x+1)}{x-2} > 0$;	$(x-2)(x+1) > 0$;
10) $\frac{1}{x-3} < 2$;	$x - 3 > \frac{1}{2}$;
11) $x^2 \geq x$;	$x \geq 1$;
12) $x^4 \geq x^2$;	$x^2 \geq 1$;
13) $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0$;	$x + 1 > 0$;
14) $\sqrt{(x+4)^2(x+1)} > 0$;	$x + 1 > 0$;

(1)

(2)

15) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \geq 2;$

$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \geq 2;$

16) $\sqrt{x} < x+1;$

$x < (x+1)^2;$

17) $\ln(x-3) > 2;$

$x-3 > e^2;$

18) $\log_2 x^2 \leq 2;$

$\log_2 x \leq 1;$

19) $\sin x > \frac{1}{2};$

$x > \arcsin \frac{1}{2}.$

8. Укажите верные высказывания.

а) $g(x) = x^2 - \frac{1}{4};$

1) если $x - 1 > 0$, то $g(x) > 0;$ 2) если $1 - 2x > 0$, то $g(x) > 0;$ 3) для того чтобы $g(x) > 0$, достаточно, чтобы $x + \frac{1}{2} < 0;$ 4) для того чтобы $g(x) > 0$, необходимо, чтобы $x + \frac{1}{2} < 0;$ 5) для того чтобы $|x| > 1$, необходимо, чтобы $g(x) > 0;$ 6) для того чтобы $|x| > 1$, достаточно, чтобы $g(x) > 0;$ 7) для того чтобы $|x| < \frac{1}{2}$, необходимо и достаточно, чтобы $g(x) < 0.$

б) $h(x) = 1 - x^2;$

1) из неравенства $x^2 - 4 < 0$ следует неравенство $h(x) > 0;$ 2) неравенство $x^2 - 4 < 0$ является следствием неравенства $h(x) > 0;$ 3) неравенство $h(x) < 0$ является следствием неравенства $2x - 1 > 0;$ 4) из неравенства $h(x) < 0$ следует неравенство $2x - 1 > 0;$ 5) неравенство $h(x) > 0$ равносильно неравенству $(1-x)^3 \times (1+x)^5 > 0;$ 6) неравенство $h(x) > 0$ равносильно неравенству $(1-x)^4 \times (1+x) > 0;$ 7) неравенство $h(x) > 0$ является следствием неравенства $x^2 + 2x + 2 > 0;$ 8) неравенство $x^2 + 2x + 2 > 0$ является следствием неравенства $h(x) > 0;$ 9) неравенство $h(x) < 0$ следует из неравенства $\sin x - 2 > 0;$ 10) из неравенства $h(x) < 0$ следует неравенство $\sin x - 2 > 0.$

■ Геометрические модели

9. Проверьте, что выпуклый n -угольник имеет $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

10. У двух многоугольников 109 диагоналей. У одного из них на две стороны больше, чем у другого. Сколько сторон у каждого из них?

11. Найдите все пары многоугольников, у которых в сумме 109 диагоналей.

12. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с квадратным основанием $ABCD$ (рис. 117). Пусть ребро основания равно 1, а боковое ребро равно x .

Найдите такие значения x , при которых:

- а) диагональ его боковой грани равна 2;
- б) диагональ параллелепипеда больше 3;
- в) расстояние между ребрами AD и $B_1 C_1$ меньше 5;
- г) расстояние между ребром AB и плоскостью сечения $A_1 B_1 C D$

меньше 0,5;

д) угол между диагональю боковой грани и основанием равен 45° ;

е) углы между диагональю и гранями равны;

ж) угол, который образует с основанием сечение $ABC_1 D_1$, больше 60° ;

з) угол между прямыми DA_1 и AB_1 равен 60° ;

и) отношение площади поверхности параллелепипеда к площади его боковой поверхности больше 2;

к) объем пирамиды $B_1 ABCD$ равен объему пирамиды $B_1 C D D_1 C_1$;

л) объем пирамиды $B D C_1 A_1$ составляет половину объема параллелепипеда;

м) диагональ параллелепипеда больше диагонали его боковой грани на 1;

н) расстояние от вершины C_1 до сечения $B_1 D_1 C$ равно 1.

13. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$, в которой ребро основания $ABCD$ равно 2, а плоский угол при вершине пирамиды равен α (рис. 118). Определите, при каком значении α :

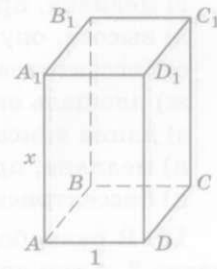


Рис. 117

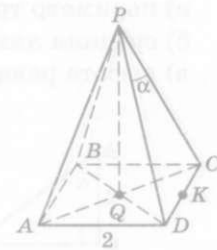


Рис. 118

- а) площадь боковой грани равна 1;
- б) $PQ = QC$, где PQ — высота пирамиды;
- в) $PK = 3$, где точка K — середина ребра CD ;
- г) $PA > 4$;
- д) $PQ < 3$;
- е) расстояние от точки Q до плоскости PCD равно половине PK ;
- ж) расстояние от прямой AB до плоскости PCD равно расстоянию от прямой BC до плоскости PAD ;
- з) площадь боковой поверхности не больше 4;
- и) угол между прямой PQ и плоскостью PBC равен 30° ;
- к) угол между плоскостями PAD и PBC — тупой;
- л) объем пирамиды больше $\frac{4}{3}$;
- м) расстояние между прямыми AD и PC равно расстоянию между прямыми AB и PC .

14. Катет прямоугольного треугольника ABC равен 2 и прилежащий к нему острый угол равен α (рис. 119).

Определите, при каком угле α :

- а) площадь треугольника равна 2;
- б) периметр треугольника равен 4;
- в) разность катетов больше 1;
- г) медиана, проведенная к гипотенузе, больше 1;
- д) высота, опущенная на гипотенузу, меньше 1;
- е) биссектриса прямого угла меньше 1;
- ж) площадь описанного круга равна 2π ;
- з) длина вписанной окружности равна 4π ;
- и) медиана, проведенная на известный катет, равна 2;
- к) биссектриса данного острого угла больше 2.

15. В равнобедренной трапеции $ABCD$ большее основание равно 2, а три другие стороны равны x (рис. 120).

Определите, при каком значении x :

- а) периметр трапеции равен 5;
- б) средняя линия трапеции равна боковой стороне;
- в) высота равна половине боковой стороны;

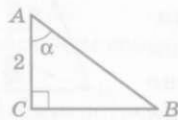


Рис. 119

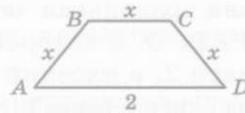


Рис. 120

- г) диагональ равна 2;
- д) в трапецию можно вписать окружность;
- е) вокруг трапеции можно описать окружность.

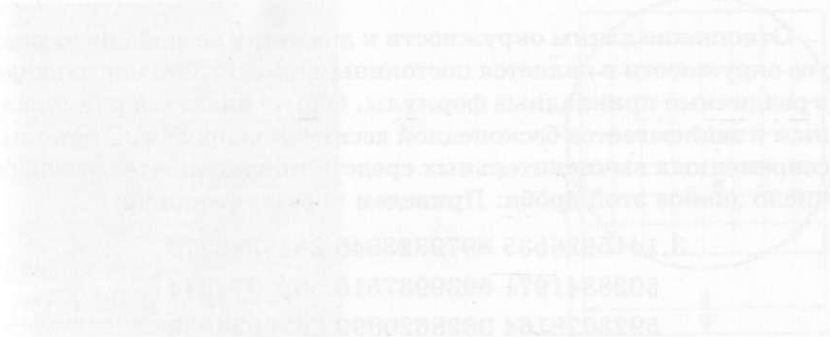
16. Куб срезали по углам так, что на каждой грани образовался правильный восьмиугольник.

Какая часть объема куба осталась?

17. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя его ребрами, имеющими с этой диагональю общую точку, углы 45° и 60° .

Какой угол она образует с третьим ребром, имеющим с данной диагональю общую точку?

Введен информации



Предлагаемые задания носят характер лабораторных работ. Как правило, они относятся к одной теме программы, хотя могут использоваться и при изучении нескольких тем. В задание включается необходимая вводная информация. Для проведения вычислений следует применять вычислительную технику (как правило, достаточно обычного микрокалькулятора).

Исследовательская работа № 1

Число Архимеда

Цель работы

Использование различных способов приближенного вычисления отношения длины окружности к диаметру, т. е. числа π .

Вводная информация

Отношение длины окружности к диаметру не зависит от радиуса окружности и является постоянным числом. Это число входит в различные прикладные формулы. Оно не является рациональным и записывается бесконечной десятичной дробью. С помощью современных вычислительных средств можно определить любое число знаков этой дроби. Приведем первые сто цифр:

3,1415926535 8979323846 2643383279
 5028841971 6939937510 5820974944
 5923078164 0628620899 8628034825
 3421170679

Задания

1. В Библии (2-я книга Хроник (Паралипоменон), гл. 4 (1—2)) говорится, что при строительстве храма Соломона был изготовлен громадный бронзовый котел.

Строительство храма Соломона в Иерусалиме

И сделал медный жертвенник: 20 локтей длина его и 20 локтей ширина его и 10 локтей высота его.

И сделал море литое — от края его до края его 10 локтей — все круглое, вышиною в 5 локтей; и снурок в 30 локтей обнимал его кругом.

Какое значение для числа π было принято в Библии?

2. В 1650 г. до н. э. египетский писец Ахмес написал на папирусе: «Круг из 9 локтей равен квадрату из 8 локтей» (рис. 121, 122).

Расшифруйте запись, найдите, какую рациональную дробь принял Ахмес за значение π . Запишите эту дробь в виде десятичной дроби и определите, сколько она содержит верных знаков числа π . Найдите относительную погрешность ошибки.

3. Архимед (287 — 212 до н. э.) привел геометрический метод вычисления числа π с любой точностью. Он рассмотрел последовательности правильных многоугольников, вписанных в единичную окружность и описанных около нее, начинающихся с любого правильного многоугольника (например, с треугольника или квадрата) и получающихся удвоением числа сторон. Сам Архимед вычислил периметры многоугольников, имеющих $3, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 2^5$ сторон, и получил оценки $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.



Рис. 121

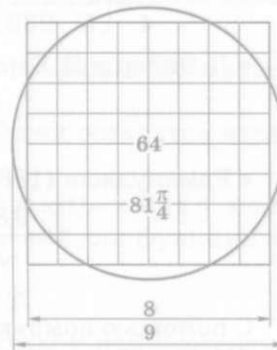


Рис. 122

Приведем формулы, по которым Архимед проводил вычисления. Если a и b — стороны правильного вписанного и описанного n -угольника, а x и y — стороны $2n$ -угольника, то $y = \frac{ab}{a+b}$, $x = \sqrt{\frac{ay}{2}}$.

Зная, что при $n = 6$ $a = 1$ (сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу окружности), $b = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,1547005\dots$

Повторите вычисления Архимеда, вычислив стороны $6 \cdot 2^4 = 96$ -угольника.

4. Л. Эйлер (1717 — 1783) ввел в обиход обозначение π и дал ряд формул для его приближенного вычисления. Буква π является первой буквой греческого слова периметров (периметр) и уже использовалась за 100 лет до Эйлера. Формулы, полученные Эйлером и его предшественниками, требовали громоздких вычислений для получения хорошей точности, но сами формулы очень красивы:

• Дж. Валлис (1616 — 1703):

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots$$

• Дж. Грегори (1638 — 1675):

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

• Г. В. Лейбниц (1646 — 1716):

$$\frac{\pi}{8} \approx \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots$$

• Машен (1680 — 1751):

$$\frac{\pi}{4} \approx \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{239} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{4}{5^3} - \frac{1}{239^3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5^5} - \frac{1}{239^5} \right) - \dots$$

• Л. Эйлер и Я. Бернулли (1759 — 1789):

$$\frac{\pi^2}{6} \approx 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

• Рамануджан (1887 — 1920):

$$\pi \approx \frac{9801}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{1103 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 27493}{(396)^4}}$$

С помощью компьютера вычислите первые знаки числа справа. На самом деле, это число совпадает с π первыми пятнадцатью знаками.

Исследовательская работа № 2

Распад радия

Цель работы

Применение свойств показательных функций к исследованию процесса распада радиоактивных элементов.

Вводная информация

Согласно экспериментальным данным скорость распада радия (и многих других радиоактивных элементов) пропорциональна его начальному количеству. Если обозначить через $x(t)$ массу вещества в момент времени t , а через $v(t)$ — скорость изменения массы (т. е. производную функции $x = x(t)$), то сформулированный закон можно записать так:

$$v(t) = kx(t), \quad (1)$$

где k — некоторая константа, зависящая от рассматриваемого вещества.

Период полураспада вещества T — это время, через которое остается половина вещества. С помощью константы T закон изменения количества вещества можно записать в таком виде:

$$x(t) = x(0) \cdot 2^{-\frac{t}{T}}, \quad (2)$$

где $x(0)$ — масса вещества в начальный момент времени $t = 0$.

Задания

1. Проверьте по формуле (2), что $x(T)$ действительно вдвое меньше, чем $x(0)$.

2. Период полураспада T одного из изотопов радия ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ равен 26,7 мин.

Какая часть первоначальной массы радия останется через 10 мин?

3. Связь между формулами $v(t) = kx(t)$ и $x(t) = x(0) \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ можно получить, используя другое представление для функции x : $x(t) = x(0) \cdot e^{-kt}$, где $e \approx 2,7$.

Найдите связь между константами k и T .

4. Используя приведенные выше формулы и компьютерные средства вычисления, решите следующие прикладные задачи.

- 1) Сколько радия останется через 300 лет, если его масса в начальный момент времени составляла 300 г?
- 2) За 500 лет распалось 10 г радия. Какова его масса в начальный момент времени?
- 3) Через сколько времени останется 99 % первоначальной массы радия?
- 4) Содержание радия на Земле в различных породах (отношение числа атомов радия к числу атомов породы) близко к 10^{-12} . Каково было содержание радия 10^6 лет назад?

Исследовательская работа № 3

Долгота дня

Цель работы

Исследование экспериментально заданной функции по ее графику.

Задания

1. Составьте таблицу долготы дня в вашей местности, отметив ее в 24 точках — по две точки на каждый месяц. (Если вы будете определять долготу дня по печатному календарю, то учтите, что он дает данные для широты Москвы.)
2. Вычислите в каждой точке отклонение h долготы дня от 12 ч. (Вычисления ведите в часах с точностью до 0,1 ч. Для нахождения h вычтите из долготы дня число 12.)
3. Постройте график функции $h(t)$, где t — время в году, по точкам.
4. Проведите исследование функции $h(t)$ по графику. Постарайтесь объяснить смысл каждого пункта исследования.
5. Ответьте на вопросы:
 - а) в какие месяцы года долгота дня возрастает быстрее всего;
 - б) как изменится график функции h , если в качестве единицы измерения для h выбрать 1 мин, а для t — 1 сут;
 - в) получим ли мы новую информацию, если для построения графика использовать 365 точек?

Траектория движения точки

Цель работы

Изучение углового коэффициента прямой.

Вводная информация

Точка движется по координатной плоскости tOy в течение отрезка времени $0 \leq t \leq 7$. При $t = 0$ точка находится в начале координат. Траектория точки — ломаная с вершинами $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ (рис. 123). В точку плоскости P_t (где $t = 0, 1, \dots, 7$) движущаяся точка приходит в момент времени t . От точки P_t до точки P_{t+1} она движется по прямой, угловой коэффициент которой k_t вычисляется по формуле

$$k_t = t^2 - y_t,$$

где $(t; y_t)$ — координаты точки P_t .

Задания

1. Вычислите последовательно координаты точек P_t .
2. Постройте траекторию точки.
3. Вычислите угловые коэффициенты k_0, k_1, \dots, k_6 звеньев ломаной.
4. Напишите уравнения прямых $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6$.

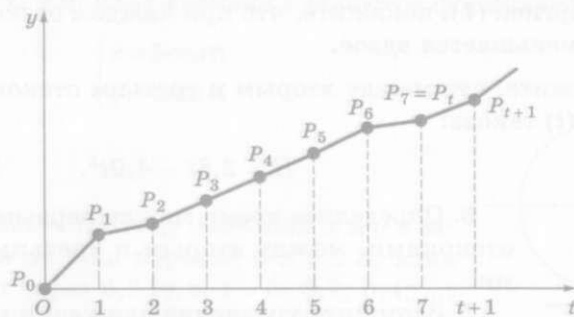


Рис. 123

Исследовательская работа № 5

Динамика падающего шарика

Цель работы

Построение математической модели механического движения.

Вводная информация

Теннисный мячик сброшен с высоты $H_0 = 1,6$ м (рис. 124). При каждом отскоке мяч теряет половину кинетической энергии.

Задания

1. Найдите скорость v_0 в момент первого падения мяча на землю, используя равенство потенциальной энергии в начале движения и кинетической энергии в момент падения:

$$mgH_0 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (1)$$

где $g \approx 9,8$ м/с².

2. Докажите, что скорость v_1 первого отскока связана со скоростью v_0 падения мяча соотношением $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0$.

3. Выразите скорости второго, третьего и последующих отскоков (v_2, v_3, \dots) через скорость v_0 . Верно ли, что v_2 вдвое меньше v_0 ?

4. Используя формулу связи между кинетической и потенциальной энергией (1), покажите, что при каждом отскоке высота подъема уменьшается вдвое.

5. Покажите, что между вторым и третьим отскоками зависимость $H(t)$ такова:

$$H = 2,8t - 4,9t^2.$$

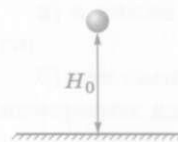


Рис. 124

6. Определите время между первым и вторым отскоками, между вторым и третьим отскоками.

7. Запишите уравнение движения между третьим и четвертым отскоками.

8. Проверьте, что время между третьим и четвертым отскоками вдвое меньше времени между первым и третьим.

9. Обозначьте время между k -м и $(k + 1)$ -м отскоками через T_k ; докажите, что

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{2}} T_{k-1}, \quad T_{k+1} = \frac{1}{2} T_{k-1}.$$

10. Используя результаты проведенного исследования, постройте график зависимости $H = H(t)$.

11. Постройте последовательность моментов падения мяча на землю: $t_1, t_2 = t_1 + T_1, t_3 = t_2 + T_2, \dots$

12. Найдите предел последовательности t_k , который покажет время движения мяча до полной остановки.

13. Каким точкам на графике соответствуют моменты отскоков?

Исследовательская работа № 6

Эллиптическая орбита

Цель работы

Использование тригонометрических функций для параметрического задания кривой.

Вводная информация

Точка P движется в координатной плоскости (рис. 125). Ее координаты в момент времени t задаются формулами

$$\begin{cases} x = 5 \cos t; \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

Задания

1. Составьте таблицу значений x и y в зависимости от t на отрезке $0 \leq t \leq 3$, взяв значения t через 0,2 (т. е. $t = 0; 0,2; 0,4; \dots; 2,6; 2,8; 3,0$). Вычисление значений x и y проводите с точностью до 0,1.

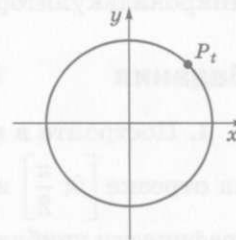


Рис. 125

2. Постройте точки с найденными координатами, выбрав подходящий масштаб по осям x и y . Соедините построенные точки плавной кривой.

3. Найдите координаты точек P_t при $t = -0,4; -1; -2; -2,6$. Постройте эти точки. Соедините все построенные точки плавной замкнутой кривой. Эта кривая называется эллипсом.

4. Найдите точки, в которых x принимает наибольшее или наименьшее значение. Найдите точки, в которых y принимает наименьшее значение. При каких значениях t обе координаты точки P_t возрастают?

5. Нанесите точки с координатами $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$. Измерьте с помощью линейки расстояния от некоторых из построенных точек до точек F_1 и F_2 . Убедитесь в том, что сумма расстояний $|PF_1| + |PF_2|$ постоянна. Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса.

6. Докажите тождества:

$$(5 \cos t + 3)^2 + (4 \sin t)^2 = (5 + 3 \cos t)^2;$$

$$(5 \cos t - 3)^2 + (4 \sin t)^2 = (5 - 3 \cos t)^2.$$

7. Докажите, что $|PF_1| = 5 + 3 \cos t$, $|PF_2| = 5 - 3 \cos t$ и получите равенство $|PF_1| + |PF_2| = 10$.

Исследовательская работа № 7

Неподвижная точка

Цель работы

Приближенное вычисление корня уравнения с помощью микрокалькулятора.

Задания

1. Постройте в крупном масштабе график функции $y = \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и график функции $y = x$ (рис. 126). Найдите графически приближенное решение уравнения $\cos x = x$. Сколько корней имеет уравнение $\cos x = x$?

2. Воспользуйтесь приближенной формулой $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ для приближенного нахождения корней уравнения $\cos x = x$. Сравните найденное значение с полученным графически.

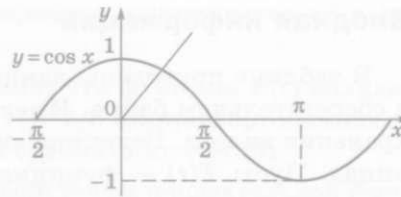


Рис. 126

3. Итерационный (от слова «итерация» — последовательное приближение) метод решения уравнения $\cos x = x$ основан на следующей процедуре. В качестве начального приближения x_0 берется произвольное число на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$. Затем вычисляется $x_1 = \cos x_0$, $x_2 = \cos x_1$ (т. е. $\cos \cos x_0$) и т. д. (в общем виде $x_{n+1} = \cos x_n$). Введите в микрокалькулятор найденное ранее приближенное значение корня. Многократно нажимая кнопку «cos», убедитесь в том, что с некоторого момента высвечиваемое на микрокалькуляторе число не меняется, т. е. для него $\cos x = x$. Выпишите найденное значение корня.

4. Повторите процедуру, начиная с различных значений x_0 . Что можно сказать о монотонности последовательности приближений $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$?

5. Изобразите в крупном масштабе часть графика на отрезке $[x - 0,1; x + 0,1]$, где x — найденный корень. Возьмите $x_0 = x - 0,1$ и изобразите на графике последовательные приближения к корню.

6. Добавьте на предыдущем чертеже кривую, симметричную графику функции $y = \cos x$ относительно прямой $y = x$. Используйте эту кривую для геометрического изображения последовательности приближений.

Исследовательская работа № 8

Рост банковского вклада

Цель работы

Изучение основных свойств показательной функции.

Вводная информация

В таблице приведены данные о росте вклада гражданина N в сберегательном банке. Имеются данные с 10-го по 30-й годы хранения вклада. Величина вклада измеряется в условных единицах. Пусть $F(t)$ — функция, характеризующая зависимость суммы вклада от срока хранения.

t	10	11	12	13	14	15	16
$F(t)$	25,937	28,531	31,384	34,523	37,975	41,662	45,950

t	17	18	19	20	21	22	23
$F(t)$	50,545	55,599	61,159	67,275	74,002	81,403	89,543

t	24	25	26	27	28	29	30
$F(t)$	98,497	108,347	119,182	131,100	144,210	158,631	174,494

Задания

1. Вычислите приближенно значения производной

$$F'(t) \approx \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{F(t+1) - F(t-1)}{2}$$

при $t = 11 + 29$ и составьте таблицу зависимости $F'(t)$ (скорости изменения вклада от года хранения).

2. Вычислите при тех же значениях t отношение $k(t) = \frac{F'(t)}{F(t)}$.

Убедитесь, что $k(t) \approx k_0$ (не зависит от t), т. е. скорость роста функции пропорциональна значению самой функции:

$$F'(t) = k_0 F(t).$$

3. Постройте график функции $F(t)$, используя таблицу.

4. Постройте график функции $\ln F(t)$. Убедитесь, что он представляет собой прямую линию с угловым коэффициентом $p = k_0$.

5. Найдите $\ln F(0)$, равный ординате точки пересечения прямой с осью ординат. Определите $F(0)$ — первоначальный вклад и начисляемый годовой процент $q = (e^{k_0} - 1) \cdot 100\%$.

Объясните, почему годовой процент вычисляется по такой формуле.

6. Проверьте экспериментально, что функция $F(t)$ обладает свойством $F(t_1) \cdot F(t_2) = F(0) \cdot F(t_1 + t_2)$. Например, вычислите $F(10) \cdot F(20)$, $F(11) \cdot F(19)$ и т. д. и сравните их с $F(30)$.

7. Сравните свойства $F(t)$ со свойствами показательной функции.

8. Запишите формулу для $F(t)$ и $F'(t)$.

Исследовательская работа № 9

Применение интеграла

Цель работы

Познакомиться на содержательных примерах с основными приложениями понятия интеграла.

■ Вариант А

Вводная информация

На рис. 127 изображен график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{10}{x^2}$, $1 \leq x \leq 5$. Точки A и B — концы графика (соответствующие абсциссам $x = 1$ и $x = 5$). Точки A_x , B_x , A_y , B_y — проекции точек A и B на оси координат.

Задания

1. Запишите в виде интеграла площадь S_x криволинейной трапеции A_xABB_x .

2. Запишите в виде интеграла площадь S_y криволинейной трапеции A_yABB_y .

3. Выразите S_y через S_x .

4. Выразите через S_x площадь криволинейного треугольника CAB .

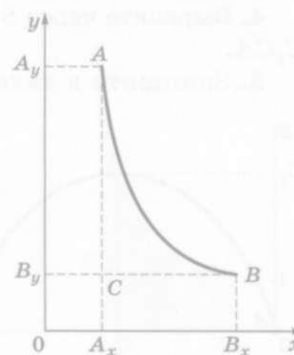


Рис. 127

5. Запишите в виде интеграла объем V_x тела, получаемого вращением криволинейной трапеции A_xABB_x вокруг оси x .

6. Запишите в виде интеграла объем V_y тела, получаемого вращением криволинейной трапеции A_yABB_y вокруг оси y .

7. Будем считать, что $f(x)$ — скорость прямолинейного движения точки в момент времени x . Запишите в виде интеграла перемещение s точки за промежуток времени $2 \leq x \leq 3$.

8. Будем считать, что $f(x)$ — сила, действующая на тело, которое движется по оси x . Запишите в виде интеграла работу A , совершаемую при перемещении тела из точки $x = 1,5$ в точку $x = 4$.

■ Вариант Б

Вводная информация

На рис. 128 изображен график функции $y = f(x)$, где $f(x) = 3\sin\frac{\pi x}{6}$, $0 \leq x \leq 6$. Точки A и B — концы графика (соответствующие абсциссам $x = 0$ и $x = 6$). Точки C_x , C_y — проекции точки C на оси координат.

Задания

1. Запишите в виде интеграла площадь S_x криволинейной трапеции ACB .

2. Запишите в виде интеграла площадь S_y криволинейной трапеции C_yCBA .

3. Выразите S_y через S_x .

4. Выразите через S_x площадь криволинейного треугольника C_yCA .

5. Запишите в виде интеграла объем V_x тела, получаемого вращением криволинейной трапеции ACB вокруг оси x .

6. Запишите в виде интеграла объем V_y тела, получаемого вращением криволинейной трапеции C_yCBA вокруг оси y .

7. Будем считать, что $f(x)$ — скорость прямолинейного движения точки в момент време-

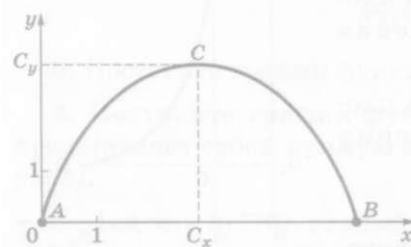


Рис. 128

ни x . Запишите в виде интеграла перемещение s точки за промежуток времени $1 \leq x \leq 3$.

8. Будем считать, что $f(x)$ — сила, действующая на тело, которое движется по оси x . Запишите в виде интеграла работу A , совершаемую при перемещении тела из точки $x = 3$ в точку $x = 4$.

9. Запишите в виде интеграла статический момент M_x однородной криволинейной пластинки AC_xC (плотностью 1) относительно оси x .

10. Запишите с помощью интегралов формулу для вычисления абсциссы x_m центра тяжести пластины AC_xC .

Исследовательская работа № 10

Вычисление интеграла

Цель работы

Познакомиться с методом исчерпывания Архимеда (составления интегральных сумм) для вычисления интеграла.

■ Вариант А

Вводная информация

Дана функция $f(x) = \frac{10}{x^2}$. Вычислите $\int_1^5 \frac{10}{x^2} dx$.

На рис. 129 дана геометрическая интерпретация этого интеграла как площади криволинейной трапеции A_xABB_x .

Задания

1. Вычисление интеграла.
 - 1) Найдите какую-нибудь первообразную функции f .
 - 2) Найдите первообразную функции f , график которой проходит через точку $(2; 1)$.
 - 3) Найдите первообразную функции, обратной функции f .

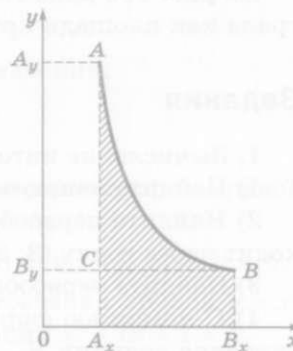


Рис. 129

4) С помощью формулы Ньютона — Лейбница вычислите значение величин S_x, S_y, V_x, V_y , указанных в исследовательской работе (ИР) № 9А, а также перемещение s и работу A .

2. Приближенное вычисление интеграла.

1) Составьте интегральные суммы S_1, S_2, S_3 для вычисления площади S_x (см. п. 1 ИР № 9А), разбив отрезок $[1; 5]$ на отрезки длины 1 ($\Delta x = 1$) и выбирая значения функции на левом конце соответствующего отрезка для S_1 , на правом — для S_2 , в его середине — для S_3 .

2) Вычислите S_1, S_2 и S_3 с точностью до 0,1 и сравните эти числа с точным значением S_x .

3) Формула Симпсона для приближенного вычисления интеграла S_4 такова:

$$S_4 = \frac{1}{6}(y_1 + y_5 + 2(y_2 + y_3 + y_4) + 4(y_{1,5} + y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5})),$$

где $y_k = f(k)$.

Эта формула является более точной, чем формула для S_1, S_2, S_3 . Вычислите S_4 . Как будет выглядеть формула Симпсона для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ в случае разбиения отрезка на четыре равные части?

■ Вариант Б

Вводная информация

Дана функция $f(x) = 3\sin \frac{\pi x}{6}$. Вычислите $\int_0^6 3\sin \frac{\pi x}{6} dx$.

На рис. 130 дана геометрическая интерпретация этого интеграла как площади криволинейной трапеции.

Задания

1. Вычисление интеграла.

1) Найдите какую-нибудь первообразную функции f .

2) Найдите первообразную функции f , график которой проходит через точку $(3; 2)$.

3) Найдите первообразную функции, обратной функции f .

4) С помощью формулы Ньютона — Лейбница вычислите значение величин S_x, V_x, M_x , указанных в ИР № 9А, а также перемещение s и работу A .

2. Приближенное вычисление интеграла.

1) Составьте интегральные суммы S_1, S_2, S_3 для вычисления площади S_x (см. п. 1. ИР № 9Б), разбив отрезок $[0; 6]$ на отрезки длины 1 ($\Delta x = 1$) и выбирая значения функции на левом конце соответствующего отрезка для S_1 , на правом — для S_2 , в его середине — для S_3 .

2) Вычислите S_1, S_2 и S_3 с точностью до 0,1 и сравните эти числа с точным значением S_x .

3) Формула Симпсона для приближенного вычисления интеграла S_4 такова:

$$S_4 = \frac{1}{6}(y_0 + y_6 + (y_1 + y_2 + y_4 + y_5) + 4(y_{0,5} + y_{1,5} + y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5} + y_{5,5})),$$

где $y_k = f(k)$.

Эта формула является более точной, чем формула для S_1, S_2, S_3 . Вычислите S_4 . Как будет выглядеть формула Симпсона для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ в случае разбиения отрезка на четыре равные части? ^a

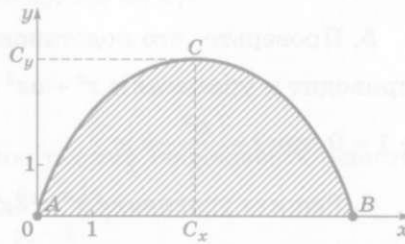


Рис. 130

Исследовательская работа № 11

Графическое решение уравнения

Цель работы

Графическое решение кубического уравнения.

Задания

1. На листе миллиметровой бумаги начертите график кривой $y = x^3$ при $-2 \leq x \leq 2$.

2. Постройте точки $P_0(0; -1)$ и $P_t(t^{-1}; 0)$ при $t = 0,2; 3,5; 4,5$.

3. Докажите, что абсциссы точек пересечения кривой $y = x^3$ и прямой P_0P_t являются корнями уравнения $x^3 - tx + 1 = 0$.

4. Найдите графически корни уравнения $x^3 - tx + 1 = 0$ при $t = 0,2; 3,5; 4,5$.

5. Проверьте, что подстановка $z = \sqrt[3]{qx} - \frac{a}{3}$, где $q = c - \frac{4b}{3} + \frac{2a^3}{27}$, приводит к уравнению $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ и уравнению $x^3 - tx + 1 = 0$ при $t = \left(\frac{a^2}{3} - b\right)q^{\frac{2}{3}}$.

6. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 + 0,75x + 2 = 0$.

Исследовательская работа № 12

Классические методы приближенного вычисления корней уравнения

Цель работы

Приближенное вычисление корней уравнения.

Вводная информация

Постройте по трем-четырем точкам график функции $y = x^5 + x - 1$ на интервале $[0; 1]$.

Задания

■ Вариант А (метод половинного деления)

1. Составьте программу вычисления значений функции

$$y = x^5 + x - 1.$$

2. Вычислите значения функции y в точках $x = 0,5; 0,75; 0,875; 0,8125; 0,78125$.

3. Постройте последовательность для нахождения корня: $[0; 1]; [0,5; 1]; [0,75; 1]; [0,750; 0,875]$.

Указание. Продолжите вычисления до тех пор, пока не получится интервал длины, меньшей чем $2 \cdot 10^{-5}$, на концах которого y принимает значения разных знаков.

■ Вариант Б (метод касательных)

1. Составьте программу для построения последовательности

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y_n}{5x_n^4 + 1} = \frac{4x_n^5 + 1}{5x_n^4 + 1}.$$

2. Выберите $x_1 = 1$ и вычислите x_2, x_3, \dots, x_7 .

3. Вычислите $x_7^5 + x_7 - 1$.

■ Вариант В (метод хорд)

1. Составьте программу для построения последовательности

$$(x_n; y_n) \text{ по формулам } \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{y_n(x_n - 1)}{y_n - 1}; \\ y_{n+1} = x_{n+1}^5 + x_{n+1} - 1. \end{cases}$$

2. Выберите $(x_1; y_1) = (0; -1)$ и $(x_2; y_2) = (1; 1)$ и вычислите $(x_3; y_3), \dots, (x_{15}; y_{15})$.

Исследовательская работа № 13

Автомат, извлекающий корень

Цель работы

Оценить, насколько уменьшается число при извлечении квадратного корня.

Вводная информация

Автомат А при помещении в него положительного числа x извлекает из него квадратный корень и берет целую часть полученного числа: $Ax = [\sqrt{x}]$.

Например, $A2 = [\sqrt{2}] = 1$, $A10 = [\sqrt{10}] = 3$.

Задания

1. Вычислите Ax при следующих значениях x :

- а) 10;
- б) 100;
- в) 1 000;
- г) 256;
- д) 2^{20} ;
- е) $2 \cdot 10^4$;
- ж) 2^{2k} .

Указание. Будем применять автомат А несколько раз подряд.

2. Вычислите:

- а) $(A \circ A) 100$;
- б) $(A \circ A) 256$;
- в) $(A \circ A \circ A) 1024$;
- г) $(A \circ A \circ A) 3^8$.

Указание. Легко заметить, что, применяя к числу $x > 1$ автомат A несколько раз, мы получим 1. Далее применять автомат нет смысла, так как $A1 = 1$. Назовем корневой длиной числа x наименьшее число применений автомата A , которое позволяет получить из числа x число 1. Обозначим корневую длину числа x через $q(x)$.

3. Вычислите $q(x)$ для следующих значений x :

- а) 10;
- б) 16;
- в) 250;
- г) 2^{12} ;
- д) 2^{64} ;
- е) $2^{64} - 1$;
- ж) 2^{2^n} ;
- з) $2^{2^n} - 1$.

4. Укажите промежутки, содержащие числа x , для которых $q(x)$ равно данному числу.

- а) 1;
- б) 2;
- в) 3;
- г) 4.

5. Чему равно $q(x)$ для $x \in [2^{2^n}; 2^{2^{n+1}})$?

Итак, мы выяснили, что для нахождения числа $q(x)$ нужно поместить x между двумя последовательными числами вида 2^{2^n} .

С помощью микрокалькулятора вычислите $q(x)$ для самых больших чисел, запись которых помещается на дисплее.

6. Найдите $q(x)$ для $x = 10^k$ при $k \leq 10$:

- а) 10^4 ;
- б) 10^5 ;
- в) 10^6 ;
- г) 10^7 ;
- д) 10^8 ;
- е) 10^9 ;
- ж) 10^{10} .

Указание. Рассмотрите, что делает автомат A с числами $0 < x < 1$.

7. Докажите, что при $0 < x < 1$ выполняется неравенство $\sqrt{x} > x$.

Указание. Выберем точность вычислений 10^{-4} и будем считать дробь, у которой первые четыре знака после запятой девятки, равной 1. Распространим на числа x определение $q(x)$ как наименьшего числа применения автомата А для получения единицы.

8. Вычислите $q(x)$ для следующих значений x :

- а) 0,9;
- б) 0,8;
- в) 0,7;
- г) 0,6;
- д) 0,5;
- е) 0,1.

Исследовательская работа № 14

Двоичные логарифмы

Цель работы

Научиться находить длину двоичной записи числа с помощью логарифма.

Вводная информация

Двоичная запись числа строится следующим образом: число a представляется как сумма степеней двойки, последовательность коэффициентов при них (это будут нули или единицы) записывается в виде «двоичного числа».

Например, $107 = 64 + 32 + 8 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

Двоичная запись числа 107 будет такой: 1101011.

Обратно, двоичное число 10101 является записью числа $2^4 + 2^2 + 1 = 21$. Двоичная запись числа широко используется в компьютерной математике. Большую роль при этом играет длина двоичного ряда, т. е. число цифр в его записи.

В десятичной системе счисления число n , лежащее между 10^{k-1} и 10^k (т. е. $10^{k-1} \leq n < 10^k$), имеет в записи k цифр. Аналогично, чтобы найти число цифр в двоичной записи числа, надо поместить

его между двумя последовательными степенями двойки: если $2^{k-1} \leq n < 2^k$, то число n имеет k двоичных цифр.

Задания

1. Найдите число двоичных цифр в записи следующих чисел:

7; 32; 100; 1 000; 2^{50} ; $2^{100} - 1$; $7 \cdot 2^{10}$; 4^{15} ; $3 \cdot 5 \cdot 17$; $(2 + 1)(2^2 + 1) \times \times (2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$.

2. Сколько нулей будет на конце двоичной записи следующих чисел:

1 000; 256; 2 005; 6^{10} ; $10^{10} + 20^{10}$; $13^3 - 1$; $27^3 + 5^3$; $3^{2005} - 1$; $10!$; $100!$.

3. Проверьте неравенство $3^5 < 2^8$.

4. Докажите неравенство $3^{100} < 2^{160}$.

5. Какую оценку для числа двоичных цифр числа 3^{100} можно получить с помощью предыдущего неравенства?

6. Составьте таблицу степеней числа 2 до 2^{20} и 3 до 3^{13} .

7. Проверьте неравенство $3^{12} < 2^{19}$.

8. Докажите неравенство $3^{100} < 2^{159}$.

9. Проверьте неравенство $3^7 > 2^{11} + 2^7$.

10. Докажите неравенство $3^{98} > 2^{98}(2^{56} + 14 \cdot 2^{52}) = 2^{151} \cdot 15$.

11. Докажите неравенство $3^{100} > 2^{158}$.

12. Сопоставив доказанные неравенства $2^{158} < 3^{100} < 2^{159}$, найдите число двоичных цифр числа 3^{100} .

13. Вычислите целую часть двоичных логарифмов чисел 1 000; 2^{50} ; $2^{100} - 1$; $7 \cdot 2^{10}$. Убедитесь, что это число на единицу меньше числа двоичных цифр.

14. Докажите, что число двоичных цифр числа k равно $[\log_2 k] + 1$.

15. Сколько цифр после запятой в десятичной записи числа $\log_2 3$ необходимо знать, чтобы найти $[\log_2 3^{100}]$?

16. С помощью вычислительных устройств найдите $\log_2 3$ с нужной степенью точности и проверьте результат задачи 6.

Указание. При отсутствии доступа к вычислительным устройствам можно воспользоваться следующими значениями десятичных логарифмов: $\lg 2 \approx 0,3010$; $\lg 3 \approx 0,4771$.

Исследовательская работа № 15

Прямоугольный треугольник

Цель работы

Научиться свободно обращаться с соотношениями в прямоугольном треугольнике.

Вводная информация

В геометрических вычислениях прямоугольный треугольник и соотношения между его элементами играют примерно такую же роль, как таблица умножения при арифметических вычислениях.

■ Цикл 1. Тригонометрия прямоугольного треугольника

Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой 1 и острым углом φ (рис. 131).

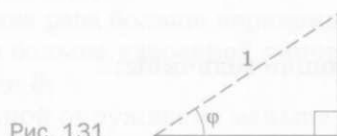


Рис. 131

Задания

1. Вычислите следующие величины как функции от φ и найдите область их значений:

- катеты;
- площадь;
- периметр;
- высоту, проведенную к гипотенузе;
- радиус вписанной окружности.

2. Определите, при каких значениях φ :

- площадь равна 2;
- гипотенуза в два раза больше переменного катета;
- один из катетов в два раза больше другого катета;
- сумма катетов больше удвоенной гипотенузы;
- периметр равен 3;
- радиус вписанной окружности меньше половины меньшего катета.

3. Найдите, к каким пределам стремятся следующие величины:

- а) радиус вписанной окружности, когда угол φ стремится к $\frac{\pi}{2}$;
- б) отношение площади треугольника к катету, противолежащему углу φ , когда этот угол стремится к нулю;
- в) отношение периметра треугольника к гипотенузе, когда угол φ стремится к $\frac{\pi}{2}$.

■ **Цикл 2.** Прямоугольный треугольник с переменным катетом

А. Дан прямоугольный треугольник с катетами 1 и x (рис. 132).

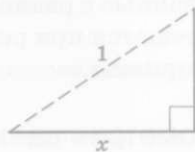


Задания

1. Найдите следующие величины:
 - а) площадь;
 - б) гипотенузу;
 - в) периметр;
 - г) высоту, проведенную к гипотенузе;
 - д) радиус вписанной окружности.
2. При каких значениях x :
 - а) площадь находится в границах от 2 до 4;
 - б) гипотенуза равна 3;
 - в) гипотенуза в два раза больше переменного катета;
 - г) сумма катетов больше удвоенной гипотенузы;
 - д) периметр равен 3;
 - е) радиус вписанной окружности меньше половины переменного катета.
3. Найдите пределы:
 - а) высоты, опущенной на гипотенузу, если катет x стремится к бесконечности;
 - б) радиуса вписанной окружности, если катет x стремится к нулю;
 - в) отношения радиуса описанной окружности к переменному катету x , если он стремится к бесконечности.

Б. Дан прямоугольный треугольник с катетом x и гипотенузой 1 (рис. 133).

Рис. 133



Задания

1. Найдите следующие величины:

- другой катет;
- площадь;
- периметр;
- высоту, проведенную к гипотенузе;
- радиус вписанной окружности.

2. При каких значениях x :

- площадь находится в границах от 2 до 4;
- другой катет равен 3;
- гипотенуза в два раза больше переменного катета;
- сумма катетов больше удвоенной гипотенузы;
- периметр равен 3;
- радиус вписанной окружности меньше половины переменного катета?

3. Найдите пределы:

- высоты, опущенной на гипотенузу, если катет x стремится к бесконечности;
- радиуса вписанной окружности, если катет x стремится к нулю;
- отношения радиуса описанной окружности к переменному катету x , если катет стремится к бесконечности.

Исследовательская работа № 16

Равнобедренный треугольник

Цель работы

Научиться свободно обращаться с соотношениями в равнобедренном треугольнике.

Вводная информация

Вычисления, связанные с равнобедренными треугольниками, особенно часто встречаются при решении стереометрических задач на пирамиды и призмы.

■ Цикл 1. Тригонометрия равнобедренного треугольника

Дан равнобедренный треугольник с основанием 2 и углом при вершине φ (рис. 134).



Рис. 134

Задания

1. Выразите как функцию от φ :

- а) угол при основании;
- б) периметр треугольника;
- в) высоту, проведенную к основанию;
- г) площадь треугольника;
- д) высоту, проведенную из вершины основания;
- е) радиус вписанной окружности;
- ж) радиус описанной окружности.

2. Найдите пределы:

- а) $\lim h(\varphi)$ при $\varphi \rightarrow 0$, где h — высота, проведенная на боковую сторону;
- б) $\lim R(\varphi)$ при $\varphi \rightarrow \pi$, где R — радиус описанной окружности.

3. Чему равно наибольшее значение площади такого треугольника?

■ Цикл 2. Равнобедренный треугольник с переменным основанием

Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 1 и основанием x (рис. 135).

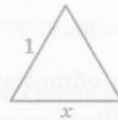


Рис. 135

Задания

1. Выразите как функцию от x :

- периметр треугольника;
- высоту, проведенную к основанию;
- площадь треугольника;
- высоту, проведенную из вершины основания;
- угол при вершине;
- радиус вписанной окружности;
- радиус описанной окружности.

2. Найдите пределы:

- $\lim h(x)$ при $x \rightarrow 2$, где h — высота, проведенная на боковую сторону;
- $\lim R(x)$ при $x \rightarrow 2$, где R — радиус описанной окружности.

3. Чему равно наибольшее значение площади такого треугольника?

■ Цикл 3. Равнобедренный треугольник с переменной высотой, опущенной на основание

Дана окружность радиуса 1. На расстоянии x от центра проведена хорда этой окружности (рис. 136).

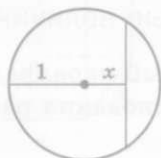


Рис. 136

Задания

1. Найдите следующие величины:

- длину хорды;
- угол, под которым хорда видна из центра окружности;
- площадь треугольника, вершинами которого являются центр окружности и концы хорды;
- угол, под которым хорда видна из точки на окружности, не совпадающей с концами хорды;
- угол, который хорда образует с касательной к данной окружности, проведенной через конец хорды;
- длину хорды, которая перпендикулярна данной, и проходит через конец данной хорды;

ж) площадь секторов, образованных радиусами, проведенными в концы данной хорды;

з) площадь сегментов, заключенных между данной хордой и окружностью;

и) длину наименьшей хорды, проходящей через середину данной хорды.

2. Чему равно наибольшее значение площади треугольника с вершинами в концах данной хорды и точкой на окружности?

3. Чему равно наибольшее значение площади треугольника, ограниченного данной хордой и радиусами, проведенными в ее концы?

Исследовательская работа № 17

Прямоугольный параллелепипед

Цель работы

Научиться свободно обращаться с соотношениями в прямоугольном параллелепипеде.

■ Цикл 1. Основные величины

Дан прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием. Пусть ребро основания равно 1, а боковое ребро равно 2 (рис. 137).

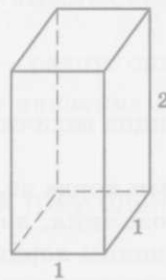


Рис. 137

Задания

Найдите следующие величины:

а) диагональ боковой грани параллелепипеда;

- б) диагональ параллелепипеда;
- в) расстояние между параллельными ребрами;
- г) расстояние между параллельными диагоналями граней;
- д) расстояние между боковым ребром и ребром основания, не имеющим с этим ребром общей точки;
- е) угол между диагональю боковой грани и гранью, которую она пересекает;
- ж) углы между диагональю и гранями;
- з) углы между плоскостью, проходящей через две диагонали параллельных граней и плоскостями граней;
- и) площадь сечений, проходящих через параллельные ребра;
- к) площадь поверхности;
- л) объем.

■ **Цикл 2.** Параллелепипед с переменным основанием

Дан прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием. Пусть ребро основания равно x , а боковое ребро равно 1 (рис. 138).

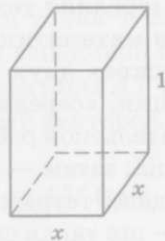


Рис. 138

Задания

Найдите следующие величины:

- а) диагональ боковой грани параллелепипеда;
- б) диагональ параллелепипеда;
- в) расстояние между параллельными ребрами, не лежащими в одной грани;
- г) расстояние между параллельными диагоналями граней;
- д) угол между диагональю боковой грани и гранью, которую она пересекает;
- е) углы между диагональю и гранями;
- ж) углы между плоскостью, проходящей через две диагонали параллельных граней, и плоскостями граней;
- з) площади сечений, проходящих через параллельные ребра;

- и) площадь поверхности;
- к) объем.

Исследовательская работа № 18

Золотая середина

Цель работы

Научиться свободно обращаться с векторами.

Вводная информация

В разговорной речи мы часто употребляем слово «средний» (например, средний доход населения в данном регионе, состояние «средней тяжести»). Понятие чего-то среднего содержится и в таком обороте речи, как «деление пополам».

Слово «средний» широко применяется и в научном стиле: «средняя скорость», «средняя температура», «средний радиус» Земли, в частности, в математике: «среднее арифметическое», «среднее геометрическое» двух чисел, «средняя линия» треугольника или трапеции, «середина отрезка».

В данной исследовательской работе займемся средними: сначала — серединой отрезка, затем — средней линией треугольника, четырехугольника и даже тетраэдра.

Середина отрезка — это такая его точка, которая равноудалена от его концов.

Если дан отрезок AB , то его серединой является такая его точка T , что $TA = TB$ (рис. 139).

Середину отрезка можно задать с помощью векторов. Середина T отрезка AB может быть задана с помощью равенства

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TB}, \text{ или } \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{TA}, \text{ или } \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \text{ или } \overrightarrow{BT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}. \quad (1)$$

Середину T отрезка AB можно задать также с помощью равенства

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \quad (2)$$

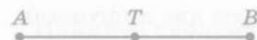


Рис. 139

в котором точка O — любая точка плоскости или пространства.

С серединой отрезка связано также понятие медианы треугольника.

Задания

1. Объясните, почему приведенные равенства (1) задают середину отрезка.

2. Докажите, что если точка T — середина отрезка AB , то справедливо равенство (2), в котором точка O — произвольная.

Указание. Сначала запишите равенство $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, после чего выразите векторы \overrightarrow{AT} и \overrightarrow{AB} как разности векторов, идущих из некоторой точки O в точки A, B, T .

Любопытно, что вектор, идущий в середину отрезка, в этом выражении представлен как среднее арифметическое векторов, идущих в концы этого отрезка. Эту запись можно сделать более компактной, убрав точку O , поскольку в этой записи она не имеет никакого значения. Получим: $\vec{T} = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$.

3. Докажите обратное: если точка T такова, что выполнено равенство (2), то она является серединой отрезка AB .

Указание. Докажите, что векторы \overrightarrow{AT} и \overrightarrow{TB} равны. Для этого выразите вектор \overrightarrow{AT} как сумму векторов $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OT}$ и вектор \overrightarrow{TB} как сумму $\overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OB}$.

4. В $\triangle ABC$ проведена медиана AM (рис. 140). Выразите вектор \overrightarrow{AM} через векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

5. В $\triangle ABC$ проведена медиана BN (см. рис. 140). Выразите вектор \overrightarrow{BN} через векторы \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{BC} .

6. В $\triangle ABC$ проведена медиана CP (см. рис. 140). Выразите вектор \overrightarrow{CP} через векторы \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} .

7. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ равна нуль-вектору (см. рис. 140).

8. Какой геометрический смысл имеет результат, полученный в задании 7?

9. Исходя из равенства $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, которое вы могли получить в задании 4, докажите, что длина медианы AM $\triangle ABC$ меньше среднего арифметического длин сторон AB и AC .

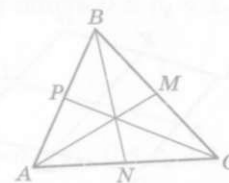


Рис. 140

10. Пусть KL — средняя линия $\triangle ABC$ (точка K лежит на стороне AB , точка L — на стороне BC). Используя векторы, докажите, что прямая KL параллельна прямой AC , а длина KL равна половине длины AC .

Указание. Докажите, что $\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

11. Пусть KL — средняя линия трапеции $ABCD$ (точка K лежит на боковой стороне AB , точка L — на боковой стороне CD). Используя векторы, докажите, что прямая KL параллельна прямой AD , а длина KL равна среднему арифметическому длин оснований AD и BC .

Указание. Докажите, что $\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Можно заметить, что выражение для средней линии треугольника получается из выражения для средней линии трапеции, если считать, что меньшее основание трапеции стянулось в точку. В такой ситуации говорят, что это формула для средней линии трапеции в вырожденном случае, т. е. когда трапеция вырождается в треугольник.

12. В четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно (рис. 141). Проведены отрезки KM и LN (их называют средними линиями четырехугольника). Докажите, что точка их пересечения делит каждый из них пополам.

Указание. Рассмотрите два случая: а) исходные точки лежат в одной плоскости; б) исходные точки не лежат в одной плоскости (являются вершинами тетраэдра). Сможете ли вы найти решение, не использующее векторы для каждого случая?

13. В треугольнике отметили середины трех сторон, а затем треугольник стерли, оставив только три середины. Сможете ли вы восстановить треугольник?

Указание. Можно решать с помощью векторов или без них.

14. Сможете ли вы выполнить задание, аналогичное заданию 13, для четырехугольника?

Рассмотрим теперь ситуацию в координатном виде (на плоскости и в пространстве).

15. Пусть в координатной плоскости известны координаты концов отрезка AB : $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$. Каковы координаты его середины — точки T ?

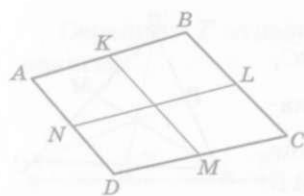


Рис. 141

Указание. Эту задачу можно решить с помощью векторов. Запишите координаты векторов \overline{OA} и \overline{OB} . Затем запишите координаты векторов \overline{AB} и \overline{AT} , предварительно обозначив координаты точки T как (x, y) . Для нахождения этих координат представьте вектор \overline{AB} как разность векторов \overline{OB} и \overline{OA} , а вектор \overline{AT} — как разность векторов \overline{OT} и \overline{OA} . У вас должно получиться в координатном виде выражение для вектора \overline{OT} , из которого вы сможете найти координаты точки T .

16. Прделайте аналогичные действия (см. задание 15) в координатном пространстве.

Указание. Эти результаты можно получить и без использования векторов. В самом простом случае данные точки разместите с одной стороны от оси абсцисс и от оси ординат, затем спроектируйте эти точки на каждую ось и рассмотрите полученные трапеции.

В результате у вас получится любопытный результат, а именно: координаты середины отрезка являются средним арифметическим координат его концов (как на плоскости, так и в пространстве). Используя этот результат, попробуйте решить какую-либо из предыдущих задач о средней линии.

Исследовательская работа № 19

Непрерывные дроби

Цель работы

Научиться задавать вещественное число.

Вводная информация

Возьмем рациональное число a и выделим в нем целую часть: $a = a_0 + r_1$, где $0 \leq r_1 < 1$.

Если $r_1 \neq 0$, то число $\frac{1}{r_1} > 1$ и снова является рациональным.

Выделим у него целую часть: $\frac{1}{r_1} = a_1 + r_2$, где вновь $0 \leq r_2 < 1$. Мы получим запись

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1 + r_2}.$$

Если $r_2 \neq 0$, то, продолжив вычисления: $\frac{1}{r_2} = a_2 + r_3$, $0 \leq r_3 < 1$, получим

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + r_3}}$$

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока остаток r_k не станет равным нулю. Для рационального числа a это обязательно когда-нибудь произойдет. В итоге имеем представление числа a в виде многоэтажной дроби:

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \quad (1)$$

Дробь такого вида называется *конечной непрерывной дробью*. Если число a иррационально, то процесс построения дроби никогда не оборвется и мы получим представление иррационального числа a в виде *бесконечной непрерывной дроби*. Это представление похоже на представление числа бесконечной десятичной дробью, но обладает многими новыми полезными свойствами.

Для краткости непрерывную дробь вида (1) будем записывать так: $[a_0, a_1, \dots, a_n]$. Если мы будем обрывать процесс вычисления раньше, то дроби a_0 , $[a_0, a_1]$, $[a_0, a_1, a_2]$, ..., будем называть *подходящими дробями*; k -ю подходящую дробь $A_k = [a_0, a_1, \dots, a_k]$ запишем в виде рационального числа: $A_k = \frac{m_k}{n_k}$.

Задания

1. Разложите рациональные числа $\frac{99}{26}$ и $\frac{355}{113}$ в конечные непрерывные дроби.
2. Приведите дробь

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

к виду обыкновенной рациональной дроби.

3. Выпишите подходящие дроби для разложения числа $\frac{99}{26}$.
 Проверьте, что для двух соседних дробей $\frac{m_{k-1}}{n_{k-1}}$ и $\frac{m_k}{n_k}$ всегда выполняется равенство $m_{k-1}n_k - m_k n_{k-1} = \pm 1$.

4. Проверьте, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1; \sqrt{2}-1 < 1 \text{ и } \sqrt{2}+1 > 1.$$

5. Разложение числа $\sqrt{2}-1$.

Указание. Удобнее начать с разложения числа $\sqrt{2}-1$ в непрерывную дробь.

Докажите, что

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}} = [0, 2, 2, 2, \dots].$$

Из этого вычисления следует, что число $\sqrt{2}-1 = [2, 2, 2, \dots]$, т. е. все числа a_k , $k \geq 1$, одинаковы.

6. Проверьте, что $\sqrt{2}$ раскладывается в периодическую непрерывную дробь следующим образом: $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$.

7. Вычислите 10 подходящих дробей для числа $\sqrt{2}$ и проверьте для них тождество, замеченное в задании 6.

8. Постройте разложение в непрерывную дробь «золотого числа» $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

9. Оказывается верны следующие общие результаты, доказательство некоторых можно найти в разных книгах (например, в брошюре А. Хинчина «Цепные дроби»):

а) всякая квадратичная иррациональность раскладывается в периодическую непрерывную дробь;

б) всякая периодическая непрерывная дробь представляет число, являющееся квадратичной иррациональностью;

в) для двух соседних подходящих дробей

$$A_{k+1} = [a_0, a_1, \dots, a_{k+1}] = \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} \text{ и } A_k = [a_0, a_1, \dots, a_k] = \frac{m_k}{n_k}$$

имеют место следующие соотношения:

$$m_{k+1}n_k - m_k n_{k+1} = \pm 1; \left| \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} - \frac{m_k}{n_k} \right| = \frac{1}{n_{k+1}n_k};$$

г) последовательность подходящих дробей с четными номерами образует последовательность приближений к исходному числу с недостатком, а с нечетными номерами — с избытком.

10. Проверьте утверждения пп. в и г задания 9 для первых десяти подходящих дробей разложения чисел $\sqrt{2}$ и $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ в непрерывные дроби.

Исследовательская работа № 20

Наилучшие приближения

Цель работы

Ознакомиться с различными способами задания вещественного числа.

Вводная информация

Ряды Фарея составлены из несократимых рациональных дробей. Они служат для того, чтобы строить наилучшие рациональные приближения к данному иррациональному числу, имеющие знаменатель, не превосходящий данного числа. Точнее это означает следующее: несократимая рациональная дробь $\frac{p}{q}$ считается одним из наилучших приближений к заданному числу α , если любая другая дробь, более близкая к числу α , чем дробь $\frac{p}{q}$, имеет знаменатель, больший q .

Выпишем в порядке возрастания все несократимые дроби, лежащие между $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ и имеющие знаменатели, не превосходящие данного числа n . Такая последовательность называется n -м рядом Фарея и обозначается через F_n .

Приведем примеры:

$$F_2: \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1};$$

$$F_3: \frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1}.$$

Задания

1. Выпишите ряды F_4 , F_5 , F_6 и F_7 .

2. Проверьте на построенных примерах выполнение следующих свойств:

а) если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — две соседние дроби одного ряда Фарея, то $bc - ad = 1$;

б) если $\frac{a}{b}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{c}{d}$ — три последовательных члена одного ряда Фарея, то $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$;

в) докажите свойство «б» в общем виде, считая известным свойство «а».

3. В задании 2 (п. б) предложен следующий способ построения ряда F_n , зная предыдущий ряд F_{n-1} : между двумя соседними членами $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ряда F_{n-1} надо вписать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $b + d = n$. Проверьте, что первые построенные ряды Фарея могут быть получены таким способом.

4. Считая, что ряды Фарея построены способом, указанным в задании 3, докажите задание 2 (п. а).

Указание. В первых рядах Фарея доказываемое тождество проверено. Проведем переход от ряда F_{n-1} (тождество считаем проверенным) к ряду F_n . Его нужно проверять только для «новых членов». Заметьте, что каждая «новая» дробь $\frac{p}{q}$ стоит в окружении двух «старых» $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, причем $p = a + c$ и $q = b + d$.

5. Для нахождения наилучших приближений данного числа с ограниченными знаменателями поступают так: пусть нужно найти наилучшее приближение числа $0 < \alpha < 1$ со знаменателем, не превосходящим n . Строят ряд Фарея F_n , помещают число α между двумя его соседними дробями и выбирают ту из них, которая ближе к α . В реальных вычислениях используют приближенную десятичную запись чисел. Заметьте, что для решения задачи нужно строить не весь ряд Фарея F_n , а только его часть, «близкую» к α .

1) Постройте наилучшее приближение к числу $\sqrt{2}$ со знаменателем, не превосходящим 100.

2) Постройте наилучшее приближение к числу π со знаменателем, не превосходящим 50.

ЧАСТЬ III Проекты

В данной части представлены задания, продолжающие и развивающие исследовательские (лабораторные) работы и отличающиеся от последних тем, что в основе каждого из них лежит определенная практическая ситуация, исследование которой требует применения различных средств математики. Поэтому к материалу этих заданий можно обращаться неоднократно по мере накопления необходимых знаний и умений.

Проект 1

Обучение и производительность труда

Темы: ■ Функции и графики ■ Исследование функции по графику ■ Преобразование графиков функций ■ Показательные и логарифмические функции ■ Показательные и логарифмические уравнения ■ Интегрирование и приближенное решение уравнений

Задача 1. На механический участок в бригаду к опытному токарю Павлу Павловичу направили группу выпускников колледжа. Новая бригада получила производственное задание: за рабочую неделю (40 ч) выточить 4 400 деталей. Но молодые токари были недостаточно обучены — производительность каждого из них составляла в среднем 7 дет./ч (бригадир изготовлял 12 дет./ч). При такой производительности бригада сумела бы за одну рабочую неделю выточить только 3 280 деталей, т. е. план был бы не выполнен. Смекалистый бригадир нашел выход из положения: он не стал сразу приступать к выполнению задания, а потратил полдня (4 ч) на обучение своих подопечных с отработкой каждого движения — в результате производительность молодых токарей выросла в среднем до 11 дет./ч. Сколько деталей было изготовлено бригадой за оставшееся время?

Решение. Для решения задачи найдем сначала неизвестное число n молодых рабочих. По условию задачи за 40 ч работы бригадир и молодых n рабочих могли выточить 3 280 деталей, причем за 1 ч бригадир вытачивал 12 дет., а рабочий — 7 дет., т.е. за 1 ч вся бригада вытачивала $12 + 7n$ деталей, а за 40 ч — $40(12 + 7n)$. Зная это число, составим уравнение:

$$40(12 + 7n) = 3\,280.$$

Решив это линейное уравнение, получим промежуточный ответ $n = 10$ и затем дадим ответ на вопрос задачи, вычислив значение выражения $36 \cdot (12 + 11n)$ при $n = 10$. В этом выражении число $36 = 40 - 4$ означает число рабочих часов, оставшихся после обучения.

Данный сюжет является типичным при рассмотрении вопросов *производительности труда*. Если мы каким-то образом измерили труд, затраченный за время t (например, выработку, число выпущенных деталей), и получили число m , зависящее, разумеется, от t , т.е. $m = m(t)$, то под производительностью труда понимают отношение

$$q = \frac{m(t)}{t}.$$

Так, производительность бригады при работе без дополнительного обучения была $\frac{3\,280}{40} = 82$ дет./ч, а при работе после обучения — $\frac{4\,392}{36} = 122$ дет./ч.

Понятие производительности труда можно было использовать при решении данной задачи.

Шаг 1: определяем производительность труда бригады до обучения:

$$q_1 = \frac{3\,280}{40} = 82.$$

Шаг 2: находим число молодых рабочих:

$$12 + 7n = 82 \Rightarrow n = 10.$$

Шаг 3: определяем производительность труда после обучения:

$$q_2 = 12 + 11 \cdot 10 = 122.$$

Шаг 4: находим выработку за 36 ч:

$$36 \cdot q_2 = 36 \cdot 122 = 4\,392.$$

Вопрос влияния обучения на производительность труда является очень важным для современного производства. Для оценки эффективности этого влияния приходится учитывать много факторов, например длительность рабочего времени, затрачиваемого на обучение, стоимость обучения (в расчете на единицу времени), изменение производительности во времени, связанное с приобретением опыта (самообучение), рост самообучения в зависимости от повышения квалификации (обученный рабочий быстрее приобретает опыт работы, чем необученный) и т. д.

Необходимость учета различных факторов заставляет строить новые математические модели, существенно более сложные, чем рассмотренная модель, которая свелась к составлению и решению линейного уравнения.

Модель 1 (экспериментальное исследование зависимости производительности труда от времени обучения). Рассмотренная задача показывает, что обучение, повышение квалификации за счет производственного времени оказывается в ряде случаев весьма выгодно как с точки зрения производства (выполняется план), так и с позиции рабочих (повышается выработка и, следовательно, увеличивается заработная плата при сдельной оплате труда).

Попробуем обобщить задачу и найти оптимальный отрезок производственного времени, который целесообразно потратить на обучение в данных условиях. Чтобы провести такой расчет, необходимо знать зависимость изменения производительности труда от времени обучения $q(t)$. Такие закономерности могут быть найдены опытным путем для различных случаев: отдельных обучающихся, при самообучении, обучении под руководством наставника и т. п.

Задача 2. Тема: ■ Функции и графики.

Постройте график зависимости производительности труда q от времени обучения t , исходя из табличных данных. Время t измеряется в рабочих часах: от 0 до 10 ч, производительность труда q — в единицах выпуска продукции за единицу времени (1 ч).

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q	6,0	8,5	9,4	10,3	11	11,4	11,6	11,8	11,9	11,9	12,0

По построенному графику ответьте на следующие вопросы:

- 1) каков будет рост производительности труда после всего периода обучения;
- 2) каков средний рост производительности труда после 1 ч обучения;
- 3) какую можно ожидать максимальную производительность труда при продолжении обучения;
- 4) каков максимальный рост производительности труда и на какой стадии обучения он происходит?

Модель 2 (изучение графической зависимости производительности труда от времени обучения). В задаче 2 изменение производительности труда было задано табличным способом. Рассмотрим случай, когда на основе опыта использования различных средств обучения построены графики зависимости производительности труда q от времени обучения, составленные для средних групп, обучаемых с известным начальным значением q_0 .

Задача 3. Тема: ■ Исследование функции по графику.

На рис. 142, 143 представлены графики зависимости $q = q(t)$ при двух способах обучения — в мастерской и компьютерном классе соответственно.

1. Изучив приведенные графики, ответьте на следующие вопросы:

- 1) каков рост производительности труда за весь период обучения при каждом способе;
- 2) чем отличаются начальные стадии при разных способах обучения;
- 3) каково поведение функции скорости роста производительности труда при разных способах обучения;
- 4) если общее время обучения необходимо сократить вдвое, какой способ обучения будет более выгоден;

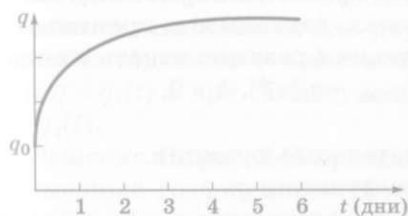


Рис. 142

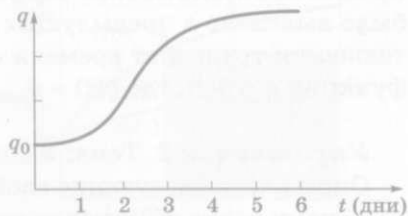


Рис. 143

5) в какой день обучения скорость роста производительности труда является максимальной?

2. Начертите примерный профиль изменения скорости роста производительности труда.

Модель 3 (экспоненциальная модель зависимости производительности труда от времени обучения). В задачах 1 — 3 рассматривались конкретные зависимости производительности труда от времени обучения, основанные на табличных или графических данных. На практике важно иметь возможность, сохраняя общий характер зависимости, изменять начальные данные — исходный уровень производительности, скорость ее роста в зависимости от уровня обучаемых и т. п.

Для описания монотонных зависимостей, быстро приближающихся к постоянному предельному значению (насыщению), пригоден класс экспоненциальных (показательных) функций.

Исходя из простейшей функции $y = e^{-t}$ ($t \geq 0$), с помощью преобразования графиков, можно построить формулы, удобные для описания процессов с указанными свойствами.

Упражнение 1. Темы: ■ Преобразование графиков функций ■ Показательные и логарифмические функции.

На рис. 144, а — г показан переход от функции $q = 2^{-t}$, $0 \leq t \leq 4$, к функции $q = q_{\max} - (q_{\max} - q_0)2^{-kt}$ с помощью последовательного преобразования графиков.

Запишите формулы, которыми последовательно задаются графики, и определите по графикам приближенные значения коэффициентов k (скорость роста); q_0 (начальное значение); q_{\max} (максимальное значение). Основание 2 вместо более распространенного основания $e = 2,718\dots$ взято для облегчения вычислений $2 \approx e^{0,693}$.

Модель 4 (построение экспоненциальных зависимостей производительности труда от времени обучения). Как было выяснено в предыдущих задачах, зависимость производительности труда q от времени обучения t разумно искать в виде функции $q = q(t)$, где $q(t) = q_{\max} - (q_{\max} - q_0)e^{-kt}$, $k > 0$.

Упражнение 2. Тема: ■ Показательные функции.

Определите следующие свойства функции q :

- 1) чему равно $q(0)$; каков смысл коэффициента q_0 ;
- 2) каков предел функции $y = e^{-kt}$ при $t \rightarrow +\infty$;

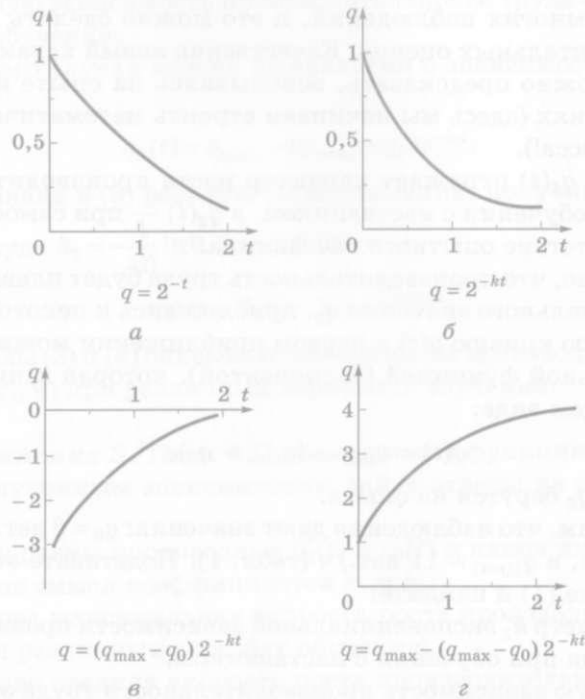


Рис. 144

3) каково предельное значение функции q ; каков смысл коэффициента q_{\max} ; каков смысл коэффициента $q_{\max} - q_0$ при экспоненте;

4) чему равна производная функции q ; что можно сказать о монотонности функции q ; в какой момент времени скорость роста производительности самая большая?

Задача 4. Тема: ■ Показательные и логарифмические уравнения.

Найдите параметр k экспоненциальной зависимости для двух способов обучения — с наставником $q = q_1(t)$ и при самообучении $q = q_2(t)$.

Решение. На рис. 145 приведен примерный график зависимости $q(t)$. Он обычно строится после статистической обработки ре-

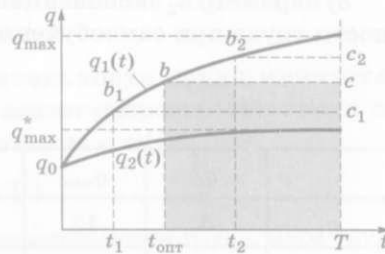


Рис. 145

зультатов многих наблюдений, и это можно сделать на основе экспериментальных оценок. Качественно новый характер таких кривых можно предсказать, основываясь на опыте и здравых рассуждениях (здесь мы начинаем строить математическую модель процесса!).

Кривая $q_1(t)$ отражает характер роста производительности труда при обучении с наставником, а $q_2(t)$ — при самообучении, т. е. в отсутствие опытного наставника.

Очевидно, что производительность труда будет плавно возрастать от начального значения q_0 , приближаясь к некоторому пределу. Такую кривую $q(t)$ в первом приближении можно описать показательной функцией (экспонентой), которая записывается в следующем виде:

$$q(t) = q_{\max} - (q_{\max} - q_0)e^{-kt}, \quad (1)$$

где q_{\max} и q_0 берутся из опыта.

Допустим, что наблюдения дают значения: $q_0 = 6$ дет./ч, $q_{\max 1} = 12$ дет./ч, а $q_{1(t=4)} = 11$ дет./ч (табл. 1). Подставьте эти данные в уравнение (1) и найдите:

1) параметр k_1 экспоненциальной зависимости производительности труда при обучении с наставником;

2) полную зависимость производительности труда от времени при обучении с наставником.

Получаем: $11 = 12 - (12 - 6)e^{-4k}$, откуда $k = -\frac{1}{4} \ln \frac{1}{6} = -0,448$ (дет./ч), и закономерность (1) можно конкретизировать в виде функции:

$$q_1(t) = 12 - 6e^{-0,448t}. \quad (2)$$

Таким же образом может быть описан процесс самообучения. Предположим, что наблюдения дают значения: $q_0 = 6$ дет./ч, $q_{\max 2} = 7,5$ дет./ч, причем $q_{2(t=10)} = 7$ дет./ч. только через 10 ч (см. табл. 1). Подставьте эти данные в уравнение (1) и найдите:

3) параметр k_2 экспоненциальной зависимости производительности труда при самообучении;

Таблица 1

	q_0	q_{\max}	$q_{(t=4)}$	$q_{(t=10)}$	k	$q(t)$
q_1	6	12	11			
q_2	6	7,5		7		

4) полную зависимость производительности труда от времени при самообучении.

Для этого случая можно по аналогии с зависимостью (1) написать:

$$q_2(t) = q_{\max_2} - (q_{\max_2} - q_0)e^{-k_2 t}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) результаты наблюдений, получим: $7 = 7,5 - e^{-k_2 t}$, откуда $k_2 = -\frac{1}{10} \ln 0,5 = +0,0693$ и

$$q_2(t) = 7,5 - 1,5e^{-0,0693t}. \quad (4)$$

Формулы (2) и (4) описывают зависимости производительности труда (дет./ч) при различных вариантах обучения.

Упражнение 3. Тема: ■ Показательные функции.

По полученным зависимостям дайте ответы на следующие вопросы:

- 1) чему равны производные $q_1'(t)$ и $q_2'(t)$ и каков их смысл;
- 2) каков смысл коэффициентов k_1 и k_2 ;
- 3) какова максимальная скорость роста производительности труда при различных способах обучения;
- 4) какова средняя скорость роста производительности труда за 1 ч при различных способах обучения;
- 5) каков общий рост производительности труда при различных способах обучения и чем это можно объяснить?

Модель 5 (переход от производительности к выработке). При постоянной производительности труда производительность определяется отношением меры труда (выработки) m к затраченному времени: $q = \frac{m}{t}$ и выступает в качестве коэффициента пропорциональности в линейной зависимости меры труда от времени:

$$m = qt.$$

Если со временем производительность труда меняется, то в каждый момент времени она задает скорость изменения m , т. е. является производной выработки $m = m(t)$:

$$q(t) = m'(t).$$

Обратно, зная изменение производительности труда, мера труда найдется как интеграл от функции q :

$$m(T) = \int_0^T q(t) dt.$$

Геометрически, выработка m — это площадь под графиком кривой $q = q(t)$.

Задача 5. Тема: ■ Интегрирование и приближенное решение уравнений.

Оцените выработку бригады из 10 молодых рабочих за неделю в разных режимах работы: с учетом самообучения и при условии обучения с наставником.

Решение. Если специально не обучать молодых рабочих, то общая выработка Q_2 за время T пропорциональна числу молодых рабочих и площади под кривой $q_2(t)$ (рис. 146) или:

$$Q_2 = \int_0^T nq_2 dt = \int_0^T 10(7,5 - 1,5e^{-0,0693t}) dt = 10[7,5T + 21,6(e^{-0,0693T} - 1)].$$

При $T = 40$ ч:

$$Q_2 = 7,5 \cdot 400 + 216(e^{-0,0693 \cdot 40} - 1) \approx 2800 \text{ дет.}$$

Если эту же бригаду сначала обучит наставник в течение t_1 , то количество выточенных деталей будет определяться площадью прямоугольника $t_1 b_1 c_1 T$ (рис. 147), а при обучении в течение t_2 — площадью $t_2 b_2 c_2 T$.

Указание. Здесь мы учитываем два фактора: а) после окончания обучения производительность остается постоянной; б) количеством деталей, изготовленных в процессе обучения, можно пренебречь.

Каково же оптимальное время обучения $t_{\text{опт}}$, при котором количество изготовленных за время T деталей будет максималь-

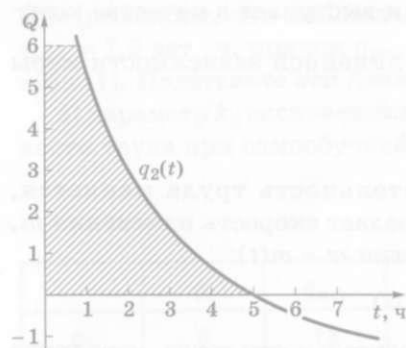


Рис. 146

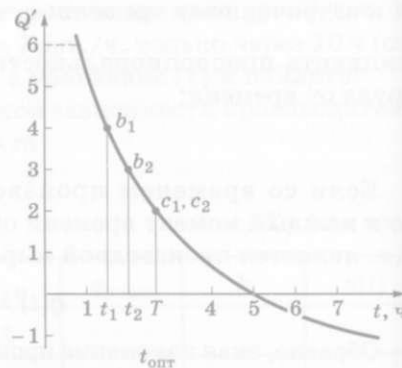


Рис. 147

ным? Очевидно, что временем $t_{\text{опт}}$ будет такое, которое обеспечит максимум площади прямоугольника $tbcT$, где основание прямоугольника — $(T - t)$, а высота — $q(t)$, т. е. общая выработка бригады определяется соотношением:

$$Q_1 = nq_1(t)(T - t) = n[q_{\text{max}_1} - (q_{\text{max}_1} - q_0)e^{-kt}](T - t). \quad (5)$$

В рассматриваемом случае

$$Q_1 = 60(2 - e^{-0,448t})(40 - t). \quad (6)$$

Максимальное значение функции (6) будет при $t_{\text{опт}}$, где производная $Q' = 0$, что после преобразований дает уравнение:

$$18,92e^{-0,448t} - 0,448te^{-0,448t} - 2 = 0. \quad (7)$$

Получилось трансцендентное уравнение (7), которое можно приближенно решить численными или графическими методами.

Составим таблицу значений функции $Q' = 18,92e^{-0,448t} - 0,448te^{-0,448t} - 2$ и построим по ней график $Q'(t)$ (см. рис. 146).

$t, \text{ч}$	1	2	3	4	5	6	7
Q'	9,80	5,35	2,57	0,84	-0,22	-0,89	-1,31

Из графика находим: $t_{\text{опт}} \approx 5 \text{ ч}$.

Таким образом, выгоднее всего при данных условиях специально обучить молодых рабочих в течение 5 ч. Тогда за оставшиеся 35 ч они за неделю изготовят (см. формулу (6)) следующее количество деталей:

$$Q_{\text{max}} = 60(2 - e^{-0,448 \cdot 5})(40 - 5) \approx 3967 \text{ (дет.)},$$

что составляет $\frac{3976}{2800} \cdot 100\% = 142\%$ от количества деталей Q_2 , выточенных необученными токарями, т. е. выработка в результате обучения за счет производственного времени увеличилась более чем на 40 %.

На основании проведенных расчетов можно сделать очень важный вывод. Обучение за счет рабочего времени, если оно сопровождается ростом производительности труда, в конечном итоге приводит к увеличению выработки несмотря на кажущиеся потери рабочего времени на обучение. Оптимальное же время обучения для обеспечения максимального конечного результата в каждом конкретном случае может быть оценено с помощью несложных математических расчетов.

Проект 2

Подъем тела из воды

Темы: ■ Функции и графики ■ Интеграл и его применение ■ Многогранники и круглые тела ■ Основы тригонометрии

Задача. Кран поднимает бетонный куб из котлована, заполненного водой на глубину h_0 . Площадь котлована S , длина ребра куба a . Как зависит уровень воды в котловане h от высоты выступающей над поверхностью воды части куба x с момента появления куба над водой? Какую минимальную работу A должен совершить кран, чтобы поднять куб из воды на высоту x ? Плотность бетона ρ , плотность воды ρ_0 .

Решение. Из простых геометрических соображений изменение уровня воды в котловане равно объему выступающей над поверхностью воды части куба $V(x)$ (рис. 148), деленному на площадь котлована:

$$h_0 - h(x) = \frac{V(x)}{S}.$$

Тогда уровень воды определяется формулой

$$h(x) = h_0 - \frac{V(x)}{S}, \quad (1)$$

где h_0 — начальный уровень воды (куб полностью погружен в воду).

Из законов механики известно, что минимальная сила $F(x)$, необходимая для подъема куба, определяется разностью веса куба P и силы Архимеда F_A , действующей на погруженную в воду часть куба:

$$\begin{aligned} F(x) &= P - F_A = \rho a^3 - \rho_0[a^3 - V(x)] = \\ &= (\rho - \rho_0)a^3 + \rho_0 V(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда минимальная работа по подъему куба на высоту x найдется как интеграл от функции $F(x)$:

$$A(x) = \int_0^x F(x) dx. \quad (3)$$

Видно, что искомые величины $h(x)$ и $A(x)$ определяются зависимостью $V(x)$, которая в свою очередь сильно зависит от того, ка-

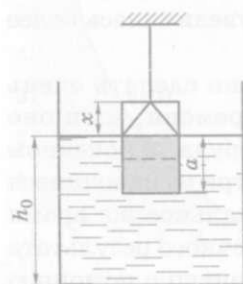


Рис. 148

кова пространственная ориентация куба при подъеме из воды. Для учета этого фактора построим несколько математических моделей для различных ориентаций куба, которые остаются неизменными при подъеме куба из котлована.

Модель 1. Простейший случай, когда при подъеме куба одна из граней параллельна поверхности воды. Это возможно, если куб крепится одинаковыми стропами к четырем вершинам куба (см. рис. 148).

В рамках такой модели V прямо пропорционально x :

$$V(x) = a^2 x.$$

По формулам (1) и (2) легко определить зависимости $h(x)$ и $F(x)$:

$$\bullet h(x) = h_0 - \frac{a^2 x}{S} \quad (\text{рис. 149});$$

$$\bullet F(x) = (\rho - \rho_0) a^3 + \rho_0 a^2 x.$$

Упражнение 1. Тема: ■ Функции и графики.

Постройте графики зависимостей $h(x)$ и $F(x)$. По построенным графикам дайте ответ на следующие вопросы:

- 1) каков характер зависимостей $h(x)$ и $F(x)$;
- 2) каков минимальный уровень воды h_{\min} в котловане;
- 3) каково максимальное значение силы F_{\max} ?

Упражнение 2. Темы: ■ Интеграл и его применение ■ Функции и графики.

1. Определите зависимость минимальной работы $A(x)$ по подъему куба из воды на высоту x и постройте график зависимости $A(x)$.

В соответствии с формулой (3) имеем:

$$A(x) = \int_0^x (\rho - \rho_0) a^3 \rho dx + \int_0^x \rho_0 a^2 x dx = (\rho - \rho_0) a^3 x + \frac{\rho_0 a^2}{2} x^2 \quad (\text{рис. 150}).$$

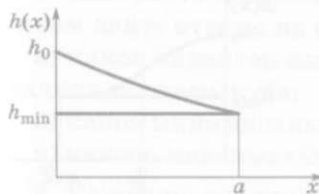


Рис. 149

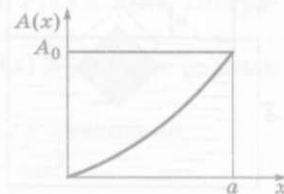


Рис. 150

2. По построенному графику дайте ответ на следующие вопросы:

- а) каков характер зависимости $A(x)$;
- б) каков смысл производной $A'(x)$ и где она принимает максимальное значение?

3. Постройте примерный график зависимости $A'(x)$, сравните его с графиком $F(x)$.

4. Вычислите полную работу по подъему куба из воды A_n .

Модель 2. Трос крепится к двум вершинам куба (рис. 151). В рамках этой модели уже нет пропорциональной зависимости V от x , поскольку площадь сечения куба в плоскости водной границы меняется при изменении высоты подъема. При этом сначала она растет, а потом убывает при увеличении x , поэтому целесообразно разбить подъем всего куба на две стадии и рассмотреть процесс на этих участках изменения x :

$$\text{а) } 0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}}; \text{ б) } \frac{a}{\sqrt{2}} < x \leq a\sqrt{2}.$$

Случай а ($0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$)

Упражнение 3. Тема: ■ Многогранники и круглые тела.

1. Определите зависимость $V(x)$:

$$V(x) = ax^2.$$

2. Определите зависимости $h(x)$ и $F(x)$.

По формулам (1) и (2) находим:

$$\bullet h(x) = h_0 - \frac{ax^2}{S} \quad (\text{рис. 152});$$

$$\bullet F(x) = (\rho - \rho_0)a^3 + \rho_0ax^2.$$

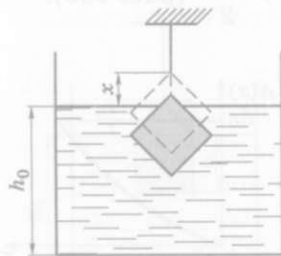


Рис. 151

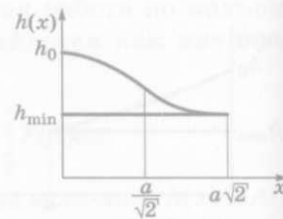


Рис. 152

Упражнение 4. Тема: ■ Интеграл и его применение.

Определите зависимость минимальной работы $A(x)$ для подъема куба из воды на высоту x .

В соответствии с формулой (3) имеем:

$$A(x) = (\rho - \rho_0)a^2x + \frac{\rho_0ax^3}{3} \quad (\text{рис. 153}).$$

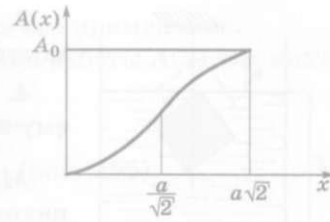


Рис. 153

Случай б ($\frac{a}{\sqrt{2}} < x \leq a\sqrt{2}$)

Упражнение 5. Тема: ■ Многогранники и круглые тела.

1. Определите зависимость $V(x)$.

Зависимость $V(x)$ находим по следующей формуле:

$$V(x) = a(2\sqrt{2}ax - x^2 - a^2).$$

2. Определите зависимости $h(x)$ и $F(x)$.

Зависимости $h(x)$ и $F(x)$ находим по формулам (1) и (2):

$$\bullet h(x) = h_0 + \frac{a(a^2 + x^2 - 2\sqrt{2}ax)}{S} \quad (\text{см. рис. 152});$$

$$\bullet F(x) = (\rho - \rho_0)a^3 + \rho_0a(2\sqrt{2}ax - x^2 - a^2).$$

Упражнение 6. Темы: ■ Интеграл и его применение ■ Функции и графики.

Определите зависимость минимальной работы $A(x)$ для подъема куба из воды на высоту x .

В соответствии с формулой (3) имеем:

$$A(x) = (\rho - \rho_0)a^3x + \rho_0a\left(a\sqrt{2}x^2 - \frac{ax^3}{3} - a^3x\right).$$

Упражнение 7. Тема: ■ Функции и графики.

1. Постройте графики зависимостей $h(x)$, $F(x)$ и $A(x)$. По графикам дайте ответы на следующие вопросы:

а) каков характер зависимостей $h(x)$, $F(x)$ и $A(x)$ на разных стадиях подъема куба;

б) каков минимальный уровень воды h_{\min} в котловане;

в) каково максимальное значение силы F_{\max} ?

2. Каков смысл производной $A'(x)$ и где она принимает максимальное значение?

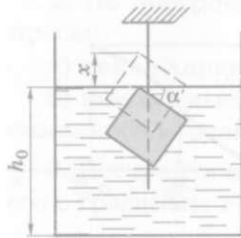


Рис. 154

3. Постройте примерный график зависимости $A'(x)$, сравните его с графиком $F(x)$.

4. Вычислите полную работу A_n по подъему куба из воды.

Модель 3. Трос крепится к двум точкам, находящимся на противоположных ребрах на одинаковых расстояниях от соответствующих вершин так, что эта грань куба наклонена на угол α к горизонту (рис. 154).

В рамках этой модели площадь сечения куба в плоскости водной границы также меняется при изменении высоты подъема, причем сначала она растет, затем остается постоянной, а потом убывает при увеличении x , поэтому целесообразно подъем куба разделить на три стадии и рассмотреть процесс на отдельных участках изменения x :

- а) $0 \leq x \leq a \sin \alpha$; б) $a \sin \alpha < x \leq a \cos \alpha$;
- в) $a \cos \alpha < x \leq a(\sin \alpha + \cos \alpha)$.

Случай а ($0 \leq x \leq a \sin \alpha$)

Упражнение 8. Темы: ■ Основы тригонометрии ■ Многогранники и круглые тела.

1. Определите зависимость $V(x)$.

Зависимость $V(x)$ находим по следующей формуле:

$$V(x) = \frac{ax^2}{\sin 2\alpha}.$$

2. Определите зависимости $h(x)$ и $F(x)$.

По формулам (1) и (2) находим:

- $h(x) = h_0 - \frac{ax^2}{S \sin 2\alpha}$ (рис. 155);

- $F(x) = (\rho - \rho_0)a^3 + \rho_0 \frac{ax^2}{\sin 2\alpha}.$

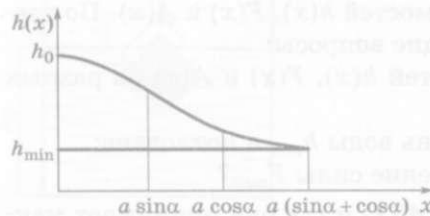


Рис. 155

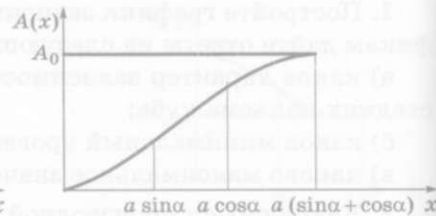


Рис. 156

Упражнение 9. Тема: ■ Интеграл и его применение.

Определите зависимость минимальной работы $A(x)$ для подъема куба из воды на высоту x .

В соответствии с формулой (3) имеем

$$A(x) = (\rho - \rho_0)a^3x + \frac{\rho_0ax^3}{3\sin 2\alpha} \quad (\text{рис. 156}).$$

Случай б ($a \sin \alpha < x \leq a \cos \alpha$)

Упражнение 10. Темы: ■ Основы тригонометрии ■ Многогранники и круглые тела.

1. Определите зависимость $V(x)$.

Зависимость $V(x)$ находим по следующей формуле:

$$V(x) = \frac{a^2x}{\cos \alpha} - \frac{a^3}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

2. Определите зависимости $h(x)$ и $F(x)$.

По формулам (1) и (2) находим:

$$\bullet h(x) = h_0 + \frac{a^3}{2S} \operatorname{tg} \alpha - \frac{a^2x}{2S \cos \alpha} \quad (\text{см. рис. 155});$$

$$\bullet F(x) = (\rho - \rho_0)a^3 + \rho_0 \left(\frac{a^2x}{\cos \alpha} - \frac{a^3}{2} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Упражнение 11. Тема: ■ Интеграл и его применение.

Определите зависимость минимальной работы $A(x)$ для подъема куба из воды на высоту x .

В соответствии с формулой (3) имеем

$$A(x) = (\rho - \rho_0)a^3x + \frac{\rho_0a^3}{2} \operatorname{tg} \alpha x - \frac{\rho_0a^2}{2 \cos \alpha} x^2.$$

Случай в ($a \cos \alpha < x \leq a(\sin \alpha + \cos \alpha)$)

Упражнение 12. Темы: ■ Основы тригонометрии ■ Многогранники и круглые тела.

1. Определите зависимость $V(x)$.

Зависимость $V(x)$ находим по следующей формуле:

$$V(x) = a^3 - \frac{a[a(\sin \alpha + \cos \alpha) - x]^2}{\sin 2\alpha}.$$

2. Определите зависимости $h(x)$ и $F(x)$.

По формулам (1) и (2) находим:

$$\bullet h(x) = h_0 - \frac{a^3}{S} + \frac{a[a(\sin \alpha + \cos \alpha) - x]^2}{S \sin 2\alpha} \quad (\text{см. рис. 155});$$

$$\bullet F(x) = \rho a^3 - \frac{\rho_0 a [a(\sin \alpha + \cos \alpha) - x]^2}{\sin 2\alpha}.$$

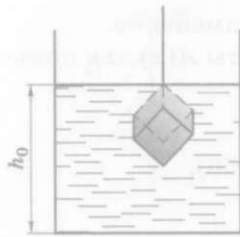


Рис. 157

Упражнение 13. Тема: ■ Интеграл и его применение.

Определите зависимость минимальной работы $A(x)$ для подъема куба из воды на высоту x .

В соответствии с формулой (3) имеем:

$$A(x) = \rho a^3 x - \frac{\rho_0 a^3 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{\sin 2\alpha} x +$$

$$+ \frac{\rho_0 a^2 (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin 2\alpha} x^2 - \frac{\rho_0 a}{3 \sin 2\alpha} x^3 \quad (\text{см. рис. 156}).$$

Упражнение 14. Тема: ■ Функции и графики.

1. Постройте графики зависимостей $h(x)$, $F(x)$ и $A(x)$.

По графикам дайте ответы на следующие вопросы:

а) каков характер зависимостей $h(x)$, $F(x)$ и $A(x)$ на разных стадиях подъема;

б) каков минимальный уровень воды h_{\min} в котловане;

в) каково максимальное значение силы F_{\max} ?

2. Каков смысл производной $A'(x)$ и где она принимает максимальное значение?

3. Постройте примерный график зависимости $A'(x)$, сравните его с графиком $F(x)$.

4. Вычислите полную работу A_n по подъему куба из воды.

5. Сравните величины h_{\min} , F_{\max} и A_n для каждой модели.

Модель 4. Трос крепится к одной из вершин куба (рис. 157).

1. На сколько участков целесообразно разбить интервал изменения x при рассмотрении зависимости $V(x)$?

2. Каков характер зависимости $h(x)$ на начальной стадии появления куба над водой?

Проект 3

Амортизация оборудования

Темы: ■ Функции и графики ■ Начала математического анализа

На любом производстве важным является вопрос: как часто следует менять оборудование, например станки? Ответ на этот вопрос зависит от ряда факторов.

Во-первых, по мере эксплуатации станка возрастают расходы на его техническое обслуживание, ремонт и замену изношенных узлов и деталей: чем дольше эксплуатировался станок, тем эти расходы больше.

Во-вторых, при замене старого оборудования, если оно в рабочем состоянии, его можно продать, но цена перепродажи падает со временем эксплуатации даже для станка в отличном состоянии.

Допустим, новый фрезерный станок стоит 3,5 млн р. Также известно, что ежегодные расходы на ремонт и техническое обслуживание станка меняются со временем (табл. 1).

Таблица 1

Время эксплуатации t , лет	0	1	2	3	4	5	6
Ежегодные расходы φ , тыс. р.	0	200	230	240	250	260	300
Время эксплуатации t , лет	7	8	9	10	11	12	
Ежегодные расходы φ , тыс. р.	400	450	500	560	620	680	

Стоимость подержанных станков приведена в табл. 2.

Таблица 2

Время эксплуатации t , лет	0	1	2	3	4
Остаточная стоимость Φ , тыс. р.	3 500	3 080	2 720	2 400	2 100
Время эксплуатации t , лет	5	6	7	8	
Остаточная стоимость Φ , тыс. р.	1 840	1 640	1 360	1 200	
Время эксплуатации t , лет	9	10	11	12	
Остаточная стоимость Φ , тыс. р.	1 080	930	810	690	

Задача 1. Тема: ■ Функции и графики.

1. Постройте графики зависимостей φ (по данным табл. 1) и Φ (по данным табл. 2) от времени эксплуатации станков t . По графикам дайте ответы на следующие вопросы:

- 1) являются ли зависимости $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$ монотонными;
- 2) каков характер монотонности зависимостей $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$;

3) какой смысл полученных зависимостей;

4) чем можно объяснить характер зависимостей $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$?

2. Рассчитайте суммарные расходы за время эксплуатации t станка, которые определяются как затратами на ремонт и техническое обслуживание, так и потерями стоимости за счет износа станка:

$$\Gamma(t) = \sum_{i=0}^t \varphi_i + [\Phi(0) - \Phi(t)].$$

Задача 2. Темы: ■ Функции и графики ■ Начала математического анализа.

1. По данным табл. 1 и 2 рассчитайте и заполните строку в табл. 3 нарастающего итога расходов $\Gamma(t)$.

2. По полученным данным постройте график зависимости $\Gamma(t)$.

3. По графику зависимости $\Gamma(t)$ изобразите примерный график зависимости $\Gamma'(t)$.

4. По построенным графикам дайте ответы на следующие вопросы:

1) являются ли зависимости $\Gamma(t)$ и $\Gamma'(t)$ монотонными;

2) каков характер монотонности зависимостей $\Gamma(t)$ и $\Gamma'(t)$;

3) о чем свидетельствует характер зависимостей $\Gamma(t)$ и $\Gamma'(t)$;

4) как связаны между собой графики зависимостей $\Gamma(t)$, $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$?

Таблица 3

Время эксплуатации t , лет	0	1	2	3	4	5	6
$\Gamma(t)$, тыс. р.	0	620	1 210	1 770	2 320	2 840	3 340
$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t)}{t}$, тыс. р./год	0	620	605	590	580	576	557

Время эксплуатации t , лет	7	8	9	10	11	12
$\Gamma(t)$, тыс. р.	4 020	4 630	5 270	5 960	6 700	7 500
$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t)}{t}$, тыс. р./год	574	579	586	596	611	627

Для оценки оптимального времени эксплуатации станка важную роль играют не общие расходы, а средние затраты на эксплуатацию за год:

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma(t)}{t} \quad (\text{см. табл. 3}).$$

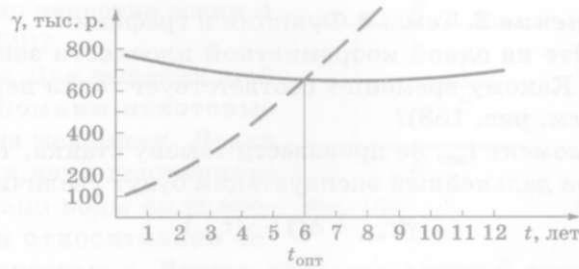


Рис. 158

Задача 3. Темы: ■ Функции и графики ■ Начала математического анализа.

1. По данным табл. 3 рассчитайте и заполните строку средних затрат $\gamma(t)$ нарастающего итога расходов $\Gamma(t)$.

2. По данным табл. 3 постройте график зависимости $\gamma(t)$ и по нему ответьте на следующие вопросы:

- 1) является ли зависимость $\gamma(t)$ монотонной;
- 2) каков характер зависимостей $\gamma(t)$;
- 3) о чем свидетельствует характер зависимости $\gamma(t)$?

3. Из данных табл. 3 и графика $\gamma(t)$ видно (рис. 158), что минимальные средние ежегодные расходы получаются при времени эксплуатации станка 6 лет: $\gamma = 557$ тыс. р./год. При большем или меньшем времени эксплуатации эта величина будет больше.

Таким образом, мы получили ответ на поставленный вопрос: для оптимизации среднегодовых расходов целесообразно заменять станки на новые через 6 лет эксплуатации.

Полученный результат можно проанализировать математически более строго.

Для оптимального времени замены станка $t_{\text{опт}}$ величина ежегодных средних затрат $\gamma(t) = \frac{\Gamma(t)}{t}$ достигает минимума (см. рис. 158), что определяется условиями $\gamma'(t_{\text{опт}}) = 0$.

Упражнение 1. Тема: ■ Начала математического анализа.

Вычислите производную $\gamma'(t)$ и покажите, что оптимальным временем замены станка является $t_{\text{опт}}$, для которого

$$\Gamma'(t_{\text{опт}}) = \frac{\Gamma(t_{\text{опт}})}{t} = \gamma(t_{\text{опт}}),$$

т. е. такой момент времени, когда скорость изменения затрат равна средним затратам за весь период эксплуатации.

Упражнение 2. Тема: ■ Функции и графики.

Постройте на одной координатной плоскости зависимости $\gamma(t)$ и $\Gamma'(t)$. Какому времени t соответствует точка пересечения графиков (см. рис. 158)?

Если в момент $t_{\text{опт}}$ не произвести замену станка, то средние затраты при дальнейшей эксплуатации будут увеличиваться:

$$\gamma(t_{\text{опт}} + \Delta t) > \gamma(t_{\text{опт}}).$$

Упражнение 3. Темы: ■ Функции и графики ■ Начала математического анализа.

Покажите графически и аналитически, что из неравенства $\gamma(t_{\text{опт}} + \Delta t) > \gamma(t_{\text{опт}})$ следует:

$$\Gamma'(t_{\text{опт}} + \Delta t) > \Gamma'(t_{\text{опт}}).$$

Величину $\Gamma'(t)$ экономисты называют *текущими маргинальными затратами*, или приращением затрат за единицу времени (год, месяц).

В результате решения задачи получилось правило: оборудование подлежит замене в тот момент, когда приращение затрат за единицу времени становится больше средних затрат за все предшествующее время эксплуатации данного оборудования.

Следует отметить, что в реальной жизни необходимо учитывать и другие факторы и соображения, которые существенно усложняют задачу: прибыль, даваемая станком, возможность приобретения равноценного нового оборудования и т. п.

Проект 4

Переправа через реку

Темы: ■ Координаты и векторы ■ Основы тригонометрии ■ Начала математического анализа ■ Прямые и плоскости в пространстве

Человек на лодке переправляется через реку шириной l , имеющую параллельные берега и спокойное течение, скорость которого одинакова на всей ширине реки и равна u (рис. 159).

Задача 1. Лодка движется с постоянной скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ относительно воды. Куда должен быть направлен нос лодки, чтобы лодка попала из точки A в точку B , находящуюся на другом

берегу точно напротив точки A (см. рис. 159)?

Решение. Для решения этой задачи вспомним некоторые сведения из механики. Лодка участвует в двух движениях: относительно воды со скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ и относительно берега со скоростью u .

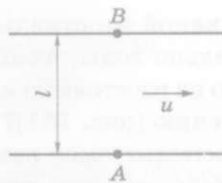


Рис. 159

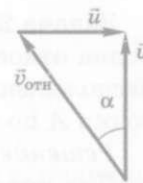


Рис. 160

Вектор скорости лодки \vec{v} относительно берега равен сумме векторов скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ и скорости течения \vec{u} (рис. 160):

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{u}. \quad (1)$$

Упражнение 1. Тема: ■ Координаты и векторы.

Нарисуйте векторный треугольник, соответствующий равенству (1). По построенному треугольнику ответьте на следующие вопросы:

- 1) как должен быть направлен вектор \vec{v} относительно вектора \vec{u} , чтобы лодка попала в точку B ;
- 2) какой получился треугольник;
- 3) какова величина вектора скорости \vec{v} ?

После ответов на вопросы становится ясно: для того чтобы лодка попала в точку B , вектор \vec{v} должен быть направлен по прямой AB , т. е. векторы \vec{v} и \vec{u} взаимно перпендикулярны, а треугольник, представленный на рис. 2, — прямоугольный. Следовательно, угол α , под которым следует направить нос лодки к прямой AB , определяется соотношением:

$$\sin \alpha = \frac{u}{v_{\text{отн}}}. \quad (2)$$

Упражнение 2. Тема: ■ Основы тригонометрии.

По равенству (2) ответьте на следующие вопросы:

- 1) в каких пределах лежит значение функции $\sin \alpha$;
- 2) как должны соотноситься между собой величины скорости лодки относительно воды и скорости течения реки;
- 3) что произойдет, если скорость лодки относительно воды будет меньше скорости течения реки?

Следует отметить, что $\sin \alpha \leq 1$, поэтому $v_{\text{отн}} \geq u$, т. е. для того чтобы переправиться строго на противоположный берег, скорость лодки относительно воды должна быть больше скорости течения. В противном случае неизбежен снос лодки течением.

Задача 2. С какой минимальной скоростью должна двигаться лодка относительно воды, чтобы попасть из точки A в точку B , расположенную на расстоянии s на противоположном берегу ниже точки A по течению (рис. 161)?

Решение. Воспользуемся равенством (1).

Для того чтобы попасть точно в точку B , вектор скорости лодки \vec{v} относительно берега должен быть направлен по прямой AB (рис. 162, а).

Для определения скорости $v_{\text{отн}}$ лодки выберем прямоугольную систему координат, направив ось x вдоль течения, а ось y — поперек течения, и рассмотрим перемещения лодки по этим направлениям.

Здесь опять вспомним сведения из механики о том, что перемещение по соответствующей оси координат равно проекции скорости на эту ось, умноженной на время движения:

$$\begin{cases} \Delta x = v_x t; & (3) \\ \Delta y = v_y t. & (4) \end{cases}$$

Упражнение 3. Тема: ■ Координаты и векторы.

Пользуясь равенством (1), определите проекции на оси x и y вектора скорости лодки относительно берега и ответьте на следующие вопросы:

- 1) чему равна проекция суммы векторов;
- 2) какова проекция на ось вектора, параллельного этой оси;
- 3) какова проекция на ось вектора, перпендикулярного этой оси;
- 4) каковы проекции $\vec{v}_{\text{отн}}$ и \vec{u} на ось x ;
- 5) каковы проекции $\vec{v}_{\text{отн}}$ и \vec{u} на ось y ;
- 6) от чего зависит знак проекции вектора на ось?

Подставив проекции скоростей v_x и v_y в соотношения (3) и (4), получим уравнения:

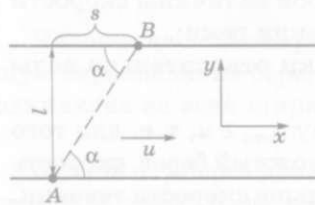


Рис. 161

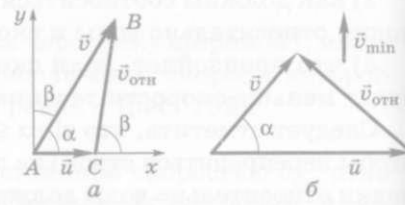


Рис. 162

$$\begin{cases} s = v_x t = (u + v_{\text{отн}} \cos \beta) t; & (5) \\ l = v_y t = v_{\text{отн}} \sin \beta t, & (6) \end{cases}$$

где t — время переправы.

Исключив из системы уравнений (5) и (6) время t , получим

$$v_{\text{отн}} = \frac{u}{\frac{s}{l} \sin \beta - \cos \beta}. \quad (7)$$

Относительная скорость $v_{\text{отн}}$ зависит от угла β и необходимо найти минимальное значение функции $v_{\text{отн}} = f(\beta)$.

Упражнение 4. Тема: ■ Начала математического анализа.

Продифференцируйте функцию $v_{\text{отн}} = f(\beta)$ и ответьте на следующие вопросы:

- 1) чему равна производная частного;
- 2) чему равна производная постоянной;
- 3) чему равна производная $\sin \beta$;
- 4) чему равна производная $\cos \beta$;
- 5) чему равна производная в минимуме функции;
- 6) при каком угле β производная $f'(\beta)$ обращается в нуль?

Ответив на приведенные вопросы, найдем угол β_{min} , при котором выполняется условие $f'(\beta) = 0$:

$$f'(\beta) = \frac{s}{l} \cos \beta + \sin \beta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \beta_{\text{min}} = -\frac{s}{l}.$$

Упражнение 5. Тема: ■ Основы тригонометрии.

Выразите $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} x$ и ответьте на следующие вопросы:

- 1) чему равен $\sin \beta_{\text{min}}$;
- 2) чему равен $\cos \beta_{\text{min}}$;
- 3) как связаны между собой $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$;
- 4) чему равен $\operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$?

Подставив значения $\sin \beta_{\text{min}}$ и $\cos \beta_{\text{min}}$ в равенство (7), найдем

$$v_{\text{min}} = u \frac{l}{\sqrt{l^2 + s^2}}. \quad (8)$$

Заметим, что $\frac{s}{l} = \operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta_{\text{min}}$, следовательно, $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, т. е.

лодку следует направить перпендикулярно прямой AB .

Эту же задачу легко решить геометрически.

Упражнение 6. Тема: ■ Прямые и плоскости в пространстве.

По треугольнику, приведенному на рис. 162, а, ответьте на следующие вопросы:

1) каково минимальное расстояние между точкой B и стороной CA (см. рис. 162, а);

2) при каком взаимном расположении векторов $\vec{v}_{\text{отн}}$ и \vec{v} длина вектора $\vec{v}_{\text{отн}}$ будет минимальна;

3) при каком угле β длина вектора $\vec{v}_{\text{отн}}$ будет минимальна?

После ответа на приведенные вопросы из рис. 162 становится очевидно, что длина вектора $\vec{v}_{\text{отн}}$ будет минимальна, когда вектор $\vec{v}_{\text{отн}}$ перпендикулярен вектору \vec{v} , т. е. треугольник, приведенный на рис. 162, б, — прямоугольный. Из этого треугольника следует, что

$$v_{\min} = u \sin \alpha.$$

Поскольку $\sin \alpha = \frac{l}{\sqrt{s^2 + l^2}}$ (см. рис. 161), то

$$v_{\min} = u \frac{l}{\sqrt{l^2 + s^2}}.$$

Естественно, что мы получили результат, соответствующий соотношению (8).

Задача 3. Как следует из задачи 1, если $v_{\text{отн}} < u$, то снос лодки по течению неизбежен. Куда нужно направить нос лодки при переправе, чтобы снос s был минимальным, и каково значение s_{\min} ?

Решение. В соответствии с векторным равенством (1) вектор скорости лодки \vec{v} относительно берега определяется из векторного треугольника, приведенного на рис. 163.

При различных направлениях $\vec{v}_{\text{отн}}$ конец вектора \vec{v} будет располагаться на окружности радиуса $v_{\text{отн}}$ с центром в точке O (см. рис. 163).

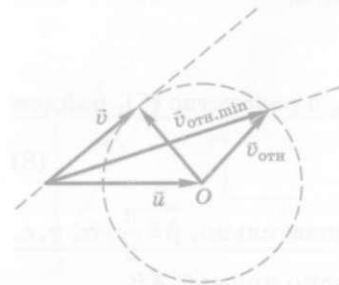


Рис. 163

Упражнение 7. Тема: ■ Прямые и плоскости в пространстве.

Дополните рис. 163, нарисовав траекторию движения лодки и линии берегов, и отметьте точки начала и конца переправы, а также снос s лодки и ответьте на следующие вопросы:

1) как направлена траектория движения лодки по отношению к вектору скорости \vec{v} ;

2) в каких пределах меняется снос лодки;

3) при каких условиях снос лодки будет минимальным?

Ответив на приведенные вопросы, мы выяснили, что направление вектора \vec{v} определяет направление траектории движения лодки и снос лодки s . Очевидно, что минимальный снос будет, когда траектория направлена по касательной к окружности, а скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$ перпендикулярна скорости \vec{v} . Минимальный снос в этом случае легко определяется из геометрических представлений на рис. 164:

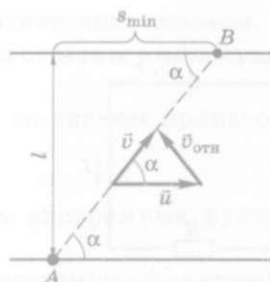


Рис. 164

$$s_{\min} = l \operatorname{ctg} \alpha = l \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{v}.$$

Для обеспечения этого минимального сноса нос лодки необходимо направить перпендикулярно траектории движения — лодка относительно берега движется бортом вперед!

Проект 5

Составление елочной гирлянды

Темы: ■ Функции и графики ■ Начала математического анализа ■ Развитие понятия о числе

Задача. Семья Светловых решила встречать Новый год на даче. На участке росла прекрасная елка, и папа решил украсить ее электрической гирляндой. В сарае оказались аккумуляторная батарея с ЭДС $\mathcal{E} = 120$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом и большое количество электрических лампочек, рассчитанных на напряжение $U_0 = 10$ В и мощность $W_0 = 10$ Вт. Движимый желанием сделать украшение наиболее эффектным, папа обратился к старшему сыну Александру, обучающемуся в электротехническом колледже, с просьбой рассчитать максимальное количество лампочек, которые при соединении в гирлянду будут гореть полным накалом?

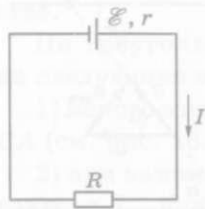


Рис. 165

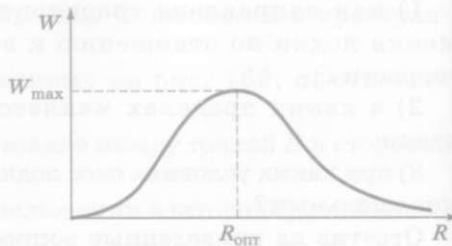


Рис. 166

Решение. Александр сначала решил задачу, как можно наиболее эффективно использовать батарею, т. е. какую максимальную полезную мощность можно получить от нее (на сопротивлении R в цепи, рис. 165). При этом ему пришлось вспомнить некоторые сведения, полученные на занятиях по физике и электротехнике. Мощность, выделяемая на сопротивлении R , определяется законом Джоуля — Ленца:

$$W = I^2 R,$$

где I — ток в цепи, который можно найти из закона Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

Таким образом, выделяемая во внешней цепи мощность зависит от сопротивления R :

$$W = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}. \quad (1)$$

Упражнение 1. Тема: ■ Функции и графики.

Нарисуйте примерный график функции $W(R)$ и определите характер такой зависимости, ответив на следующие вопросы:

- 1) каков знак функции $W(R)$ при $R > 0$;
- 2) к какому пределу стремится $W(R)$ при $R \rightarrow 0$;
- 3) к какому пределу стремится $W(R)$ при $R \rightarrow \infty$;
- 4) является ли функция $W(R)$ непрерывной;
- 5) имеются ли у функции $W(R)$ экстремумы при $R \in (0; \infty)$?

После ответов на приведенные вопросы очевидно, что при $R > 0$ $W > 0$, а при $R \rightarrow 0$ $W \rightarrow 0$ и при $R \rightarrow \infty$ $W \rightarrow 0$, т. е. функция имеет максимум при некотором R_{opt} (рис. 166).

Для нахождения точки максимума можно продифференцировать функцию $W(R)$.

Упражнение 2. Тема: ■ Начала математического анализа.

Вычислите производную функции $W(R)$ и ответьте на следующие вопросы:

- 1) как связана монотонность функции со знаком производной;
- 2) как меняется знак $W'(R)$;
- 3) что является необходимым условием экстремума функции;
- 4) что является достаточным условием экстремума функции?

Из ответов на приведенные вопросы ясно, что в точке максимума $W'(R) = 0$. Тогда получаем

$$W'(R) = \mathcal{E}^2 \frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4} = \mathcal{E}^2 \frac{r-R}{(R+r)^3} = 0,$$

т. е.

$$R_{\text{опт}} = r, \text{ а } W_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

Но Александр еще не изучал производную и попробовал преобразовать функцию. Функция $W(R)$ зависит сложно от R , причем зависимость от R присутствует как в числителе, так и в знаменателе дроби. Можно упростить выражение (1), поделив числитель и знаменатель на R :

$$W = \frac{\mathcal{E}^2}{\left(\sqrt{R} + \frac{r}{\sqrt{R}}\right)^2}.$$

Ясно, что мощность W будет максимальной при минимальном знаменателе. Александр вспомнил, что есть неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Упражнение 3. Тема: ■ Развитие понятия о числе.

Напишите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом и ответьте на следующие вопросы:

- 1) для каких чисел справедливо неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом;
- 2) при каком условии неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом переходит в точное равенство;
- 3) если сумма нескольких чисел равна постоянному числу, то в каком случае их произведение максимально;
- 4) если произведение нескольких чисел равно постоянному числу, то в каком случае их сумма минимальна?

Ответив на приведенные вопросы, можно сформулировать важное следствие из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом: если произведение двух чисел постоянно, то их сумма минимальна, когда эти числа равны друг другу. Это следствие как раз хорошо применимо к сумме, стоящей в скобках знаменателя, т.е. она будет минимальна, когда $\sqrt{R} = \frac{r}{\sqrt{R}}$, или $R = r$, и, следовательно, $W_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$.

Подставив данные задачи, Александр определил, что максимальная полезная мощность, которую можно получить от батареи:

$$W_{\max} = \frac{(120)^2}{4 \cdot 10} = 360 \text{ Вт.}$$

Таким образом, максимальное число лампочек, которые могут гореть полным накалом,

$$N_{\max} = \frac{W_{\max}}{W_0} = \frac{360}{10} = 36.$$

Но как соединить эти 36 лампочек в гирлянду?

Александр вычислил, какие параметры обеспечивают горение лампочек полным накалом. По известным мощности и напряжению, на которые рассчитаны лампочки, из закона Джоуля — Ленца легко определяется сила электрического тока для полного накала лампочек

$$I_0 = \frac{W_0}{U_0} = \frac{10 \text{ Вт}}{10 \text{ В}} = 1 \text{ А.}$$

Из закона Ома сопротивление нити накаливания лампочки в этом режиме

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{10 \text{ В}}{1 \text{ А}} = 10 \text{ Ом.}$$

И теперь надо решить задачу, как нужно соединить лампочки сопротивлением R_0 каждая, чтобы общее сопротивление соединения R было равно $r = 10$ Ом. Для того чтобы все лампочки горели полным накалом, их положение в электрической схеме соединения должно быть одинаковым.

В общем случае схема соединения лампочек таким образом показана на рис. 167: m параллельных групп из n последовательно соединенных лампочек.

Общее сопротивление такого соединения:

$$R = \frac{n}{m} R_0.$$

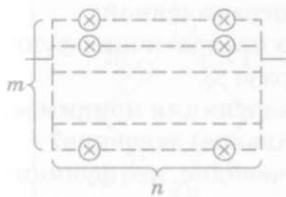


Рис. 167

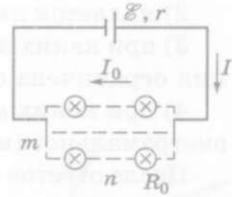


Рис. 168

Из условия $R = r$ с учетом того, что $R_0 = 10$ Ом, получаем $m = n$.

Общее число лампочек $N = mn$, а мы уже знаем, что $N_{\max} = 36$, и $m = n$, тогда $m = n = \sqrt{36} = 6$. Таким образом, наиболее эффективная гирлянда получится, если 6 групп из 6 последовательно соединенных лампочек параллельно подключить к батарее.

Возможен и несколько иной способ решения задачи, в котором сразу из приведенных выше общих соображений об обеспечении полного накала всех лампочек рассматривается электрическая схема подключения m параллельных групп из n последовательно соединенных лампочек к батарее (рис. 168).

Далее по правилам Кирхгофа записываются уравнения для токов и напряжений в цепи:

$$I = mI_0;$$

$$nI_0R_0 + mI_0r = \mathcal{E}.$$

После определения из условий задачи номинальных параметров I_0 и R_0 , обеспечивающих полный накал лампочек (что мы уже сделали ранее), получаем, что n и m должны удовлетворять условию:

$$m + n = 12. \quad (2)$$

Общее число лампочек $N = mn$, и для нахождения максимального значения этого произведения воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом (по условию (2) сумма чисел m и n постоянна). В итоге получаем $m = n = 6$ и $N_{\max} = 36$.

Можно также из условия (2) выразить $m = 12 - n$ и тогда искать максимум квадратичной функции $N(n) = 12n - n^2$.

Упражнение 4. Тема: ■ Функции и графики.

Ответьте на следующие вопросы по свойствам квадратичной функции $ax^2 + bx + c$:

- 1) является ли квадратичная функция монотонной;

- 2) является ли квадратичная функция ограниченной;
- 3) при каких значениях коэффициента a квадратичная функция ограничена снизу, а при каких — сверху;
- 4) при каких значениях x квадратичная функция принимает экстремальное (минимальное или максимальное) значение?

После ответов на приведенные вопросы очевидно, что функция $N(n)$ имеет максимум и этот максимум достигается при значении $n = 6$.

Проект 6

Векторные диаграммы в цепях переменного тока

Темы: ■ Координаты и векторы ■ Основы тригонометрии ■ Прямые и плоскости в пространстве

Задача. К точкам A и B мостовой схемы (рис. 169) приложено переменное напряжение $U_{\sim} = U_0 \cos \omega t$. Каким будет напряжение между точками D и E ? Какова максимальная амплитуда этого напряжения и при каком условии она достигается? Каким будет при этом сдвиг фаз между напряжениями U_{AB} и U_{DE} ?

Решение. Для решения данной задачи целесообразно воспользоваться методом векторных диаграмм, который широко применяется при рассмотрении процессов в цепях переменного тока. По этому методу любой изменяющейся по гармоническому закону величине (напряжению или току) сопоставляется проекция на некоторую ось вектора, длина которого равна амплитудному значению этой величины.

Упражнение 1. Темы: ■ Координаты и векторы ■ Основы тригонометрии.

Определите зависимость от времени проекции A_x на ось x вектора \vec{A} , модуль которого равен A_0 , при вращении его вокруг точки O (рис. 170), ответив на следующие вопросы, и нарисуйте взаимное расположение векторов \vec{A} и \vec{B} , если они вращаются с одинаковой угловой скоростью ω , но вектор \vec{A} начал вращение, когда вектор \vec{B} уже повернулся на угол φ (рис. 171):

- 1) если вектор \vec{A} повернулся на угол α , чему равна его проекция A_x ;
- 2) как зависит от времени t угол поворота α вектора \vec{A} при его вращении с постоянной угловой скоростью ω ;

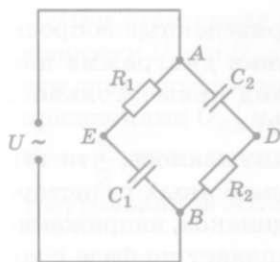


Рис. 169

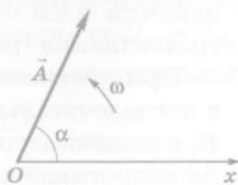


Рис. 170

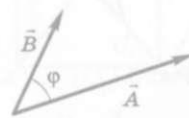


Рис. 171

3) какова зависимость проекции A_x вектора \vec{A} на ось x от времени;

4) какова зависимость проекции B_x вектора \vec{B} на ось x от времени;

5) каков угол между векторами \vec{A} и \vec{B} ?

Очень важным является направление, точнее взаимное расположение векторов на векторной диаграмме. После ответов на приведенные вопросы ясно, что угол между векторами, соответствующими двум величинам, меняющимся по гармоническому закону $A = A_0 \cos \omega t$ и $B = B_0 \cos(\omega t + \varphi)$, равен сдвигу фаз φ : вектор \vec{B} опережает вектор \vec{A} по фазе на φ , следовательно, вектор \vec{B} повернут на угол φ относительно вектора \vec{A} против часовой стрелки (см. рис. 171).

В рамках метода векторных диаграмм, записывая уравнения для соответствующих величин по правилам Кирхгофа для цепей переменного тока, все действия следует проводить по правилам действий над векторами.

Для цепочки AEB (см. рис. 169) по правилу Кирхгофа для определения напряжения U_{AB} между точками A и B следует сложить напряжения на сопротивлении R_1 и конденсаторе C_1 : $U_{AB} = U_{R_1} + U_{C_1}$.

Упражнение 2. Тема: ■ Координаты и векторы.

Нарисуйте векторную диаграмму для цепочки AEB (см. рис. 169), ответив на следующие вопросы:

1) по каким правилам производится сложение двух векторов;
2) как по правилу треугольника определяется вектор суммы двух векторов;

3) какой треугольник получается из сторон, соответствующих векторам \vec{A} , \vec{B} и $(\vec{A} + \vec{B})$, если векторы \vec{A} и \vec{B} перпендикулярны друг другу?

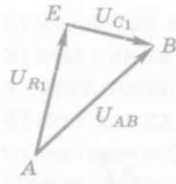


Рис. 172

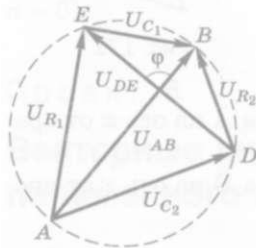


Рис. 173

После ответов на приведенные вопросы очевидно, что векторная диаграмма для цепочки AEB имеет вид прямоугольного треугольника (рис. 172).

При построении учитывалось, что ток в последовательно соединенных резисторе R_1 и конденсаторе C_1 одинаков, напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током, а напряжение на конденсаторе отстает от тока, протекающего через него, поэтому вектор U_{C_1} перпендикулярен (повернут на $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке) вектору U_{R_1} .

Аналогично построим векторную диаграмму для цепочки ADB (рис. 173).

Упражнение 3. Темы: ■ Прямые и плоскости в пространстве ■ Координаты и векторы.

Определите, где расположены точки A , B , D и E и как зависит от времени напряжение U_{DE} между точками D и E , если напряжение между точками A и B меняется по закону $U_{AB} = U_0 \cos \omega t$, ответив на следующие вопросы:

- 1) какова величина вписанного в окружность угла, опирающегося на диаметр;
- 2) каков сдвиг фаз между напряжениями, если на векторной диаграмме векторы, соответствующие этим напряжениям, образуют между собой угол φ ;
- 3) в каком случае хорда окружности имеет максимальную длину;
- 4) как соотносятся между собой вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности?

После ответов на приведенные вопросы ясно, что точки D и E лежат на окружности диаметром U_0 (амплитуда напряжения U_{AB}), поскольку углы ADB и AEB прямые.

Напряжение между точками D и E будет также меняться по гармоническому закону: $U_{DE} = U'_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Угол φ может меняться от 0 до π в зависимости от соотношения напряжений на R_1 , R_2 , C_1 и C_2 .

Поскольку точки D и E лежат на окружности диаметром U_0 , амплитуда U'_0 имеет максимальное значение U_0 только в случае, когда четырехугольник $AEBD$ будет прямоугольным (рис. 174), т. е. отрезок DE также будет диаметром окружности.

При этом сдвиг по фазе φ между напряжениями U_{DE} и U_{AB} будет в два раза больше, чем сдвиг по фазе между приложенными напряжениями U_{AB} и напряжениями U_{R_1} и U_{R_2} . Угол $\frac{\varphi}{2}$ легко находится из прямоугольных треугольников AEB и ABD :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{U_{C_1}}{U_{R_1}} = \frac{U_{C_2}}{U_{R_2}}. \quad (1)$$

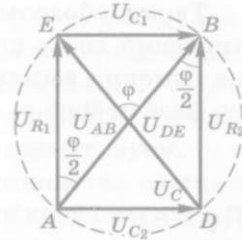


Рис. 174

Длины векторов U_{C_1} и U_{R_1} , а также U_{C_2} и U_{R_2} определяются амплитудами напряжений, которые, как известно из физики, зависят от амплитуд протекающих через соответствующие элементы токов:

$$U_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} I_{C_1}; \quad U_{R_1} = R_1 I_{R_1}; \quad U_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2} I_{C_2}; \quad U_{R_2} = R_2 I_{R_2}.$$

Так как в последовательно соединенных элементах цепи токи одинаковы ($I_{C_1} = I_{R_1}$, $I_{C_2} = I_{R_2}$), то соотношение (1) можно записать в виде:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{\omega R_1 C_1} = \frac{1}{\omega R_2 C_2}. \quad (2)$$

Из соотношения (2) видно, что максимальная амплитуда напряжения U_{DE} будет при условии $R_1 C_1 = R_2 C_2$.

Упражнение 4. Тема: ■ Основы тригонометрии.

Определите сдвиг по фазе φ между напряжениями U_{AB} и U_{DE} , ответив на следующие вопросы:

- 1) чему равен синус суммы двух углов;
- 2) чему равен косинус суммы двух углов;
- 3) чему равен синус двойного угла;
- 4) чему равен косинус двойного угла;
- 5) как выразить тангенс угла через его синус и косинус;
- 6) чему равен тангенс суммы двойного угла?

После ответов на приведенные вопросы легко получить сдвиг по фазе φ между напряжениями U_{AB} и U_{DE} , используя выражение для тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{2 \omega C_1 R_1}{(\omega C_1 R_1)^2 - 1}.$$

Таким образом, с помощью переменных емкостей и сопротивлений легко получить идеальный фазовращатель, который, не изменяя амплитуду напряжения, может обеспечить сдвиг по фазе от 0 до π .

Проект 7

Параллельное проектирование

Тема: ■ Прямые и плоскости в пространстве

Ортогональное проектирование. Ортогональное проектирование широко применяется в геометрии, физике и черчении. Например, координаты точки в прямоугольной системе координат (на плоскости или в пространстве) можно определить только благодаря ортогональному проектированию — на прямую или плоскость. Таким образом, ортогональное проектирование — основа метода координат.

Различают два вида ортогонального проектирования: на прямую и на плоскость. Рассмотрим эти виды, отметив, что слово «ортогональное» будем опускать и под словами «проектирование», «проекция» будем понимать, если нет специальной оговорки, именно ортогональный вариант.

Проектирование на прямую. Проектирование на прямую — прежде всего, задача планиметрии, но такое проектирование возможно и в стереометрии. Планиметрическая ситуация хорошо известна и распространяется на пространственные фигуры. Сначала определяют проекцию точки. Именно проекция точки A на прямую p (при условии, что точка A не лежит на этой прямой) — это основание перпендикуляра, проведенного из точки A на прямую p . Если же точка A лежит на прямой p , то ее проекцией считается она сама.

На прямую можно проектировать не только точку, но и любую фигуру, а именно: проекцией фигуры F на прямую p называется множество проекций всех точек фигуры F и только их.

Задача 1. Какой фигурой является проекция на прямую: а) отрезка; б) прямой; в) круга; г) треугольника; д) шара; е) куба на его диагональ?

Указание. Для ответа на эти вопросы важно знать, что проектирование сохраняет порядок точек на прямой, а именно: если

точки A, B, C лежат на прямой так, что точка B лежит между точками A и C , то их проекции расположены в том же порядке, т. е. проекция точки B лежит между проекциями точек A и C . Не забывайте также рассмотреть случай перпендикулярности прямых: той, которую проектируем, и той, на которую проектируем.

С помощью проектирования на прямую решаются важные теоретические вопросы. Уже отмечалось о связи координат точки и проектирования. Аналогично решается вопрос о координатах вектора (на плоскости или в пространстве), которые получаются в результате проектирования отрезка, задающего вектор, на координатные оси.

При этом ключевую роль играет формула

$$A_1B_1 = AB \cos \varphi, \quad (1)$$

где AB — отрезок (в общем случае, не перпендикулярный прямой проектирования); A_1B_1 — его проекция на прямую проектирования; φ — угол между прямыми AB и A_1B_1 .

В общем случае формула (1) имеет вид:

$$d_1 = d \cos \varphi, \quad (2)$$

где d — отрезок (в общем случае, не перпендикулярный прямой проектирования); d_1 — его проекция на прямую проектирования; φ — угол между прямой, на которой лежит данный отрезок, и прямой проектирования. (Точнее говорить о длинах отрезков, но именно это имеется в виду.)

Задача 2. Дан единичный вектор. Каковы его координаты, если: а) на координатной плоскости он образует с осью x угол 120° ; б) в координатном пространстве он образует углы 60° с осями x и y ?

Указание. Для решения задачи 2 б можно воспользоваться формулой из задачи 5 (см. далее).

Задача 3. Докажите формулу (1).

Проектирование на прямую позволяет естественным образом обобщить теорему Пифагора на пространство.

Задача 4. а) Даны две взаимно перпендикулярные прямые и отрезок, который спроектирован на каждую из этих прямых. Докажите, что квадрат длины этого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на данные прямые. б) Даны три попарно перпендикулярные прямые и отрезок, который спроектирован на каждую

из этих прямых. Докажите, что квадрат длины этого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на данные прямые.

Как следствие из полученного результата, получите такой.

Задача 5. Дана прямая в пространственной системе координат. Пусть она образует с координатными осями x , y , z углы соответственно α , β , γ . Докажите, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Формула, которая связывает отрезок и его проекцию на прямую, позволяет находить углы между прямыми — как на плоскости, так и в пространстве. В самом деле, из этой формулы имеем:

$$\cos \varphi = \frac{d_1}{d}.$$

Задача 6. Вычислите угол между: а) диагоналями трапеции, у которой три стороны равны 1, а четвертая равна 2; б) линией центров двух окружностей и внешней касательной к этим окружностям, если радиусы их равны 1 и 2, а расстояние между ними равно 5 и лежат они одна вне другой; в) диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани куба; г) скрещивающимися диагоналями соседних граней куба.

Проектирование на плоскость. Проектирование на плоскость аналогично проектированию на прямую. Сохраняется определение проекции точки на плоскость и проекции фигуры на плоскость. Свойства проектирования на плоскость вытекают из того, что ортогональное проектирование на плоскость является частным случаем параллельного проектирования на плоскость. В частности, проекция прямой есть прямая, проекция отрезка является отрезком.

Задача 7. Определите, какой фигурой является проекция на плоскость: а) круга; б) треугольника; в) шара. Какой фигурой является проекция куба на его диагональ?

Указание. В задачах 2 а и б возможны разные случаи расположения плоскости проектирования и плоскости, в которой лежат эти фигуры.

Задача 8. Определите, какой фигурой является проекция куба: а) на плоскость его грани; б) плоскость его диагонального сечения; в) плоскость, перпендикулярную его диагонали и проходящую через центр куба.

Для проектирования отрезка на плоскость верны формулы (1) и (2) для проектирования отрезка на прямую, но A_1B_1 будет проекцией отрезка на плоскость проектирования; φ — угол между прямой AB и плоскостью проектирования; d_1 — проекция отрезка на плоскость проектирования; d — проекция отрезка на прямую, на которой лежит данный отрезок, и плоскостью проектирования. (Точнее говорить о длинах отрезков, но именно это имеется в виду.)

Задача 9. Докажите формулу (2) для проектирования на плоскость.

Указание. Формула позволяет вычислить угол между прямой и плоскостью. В самом деле, из этой формулы имеем:

$$\cos \varphi = \frac{d_1}{d}.$$

Задача 10. Найдите угол, который образует диагональ куба: а) с плоскостью его грани; б) плоскостью, проходящей через две его диагонали; в) плоскостью, проходящей через три диагонали его граней; г) плоскостью сечения, которое является правильным шестиугольником?

Для ортогонального проектирования есть еще одна замечательная формула — о площади проекции плоской фигуры, а именно: площадь проекции плоской фигуры равна площади самой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью проектирования и плоскостью, в которой лежит данная фигура:

$$S_1 = S \cos \varphi. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует формула для нахождения угла между плоскостями:

$$\cos \varphi = \frac{S_1}{S}. \quad (4)$$

Задача 11. Чему равен двугранный угол правильного тетраэдра?

Задача 12. Найдите угол, который образует диагональная плоскость куба: а) с плоскостью его грани; б) другой диагональной плоскостью; в) плоскостью сечения, которое является правильным шестиугольником?

Указание. Можно такой угол вычислять иначе: как угол между нормальными к данным плоскостям (прямыми, перпендикулярными этим плоскостям).

С помощью ортогонального проектирования можно отыскивать проекцию на прямую, а именно: если даны плоскость α , прямая a , которая на ней лежит и точка A вне этой плоскости, то найти проекцию точки A на прямую a можно в два этапа:

- 1) спроектировать точку A на плоскость α ;
- 2) в плоскости α спроектировать полученную проекцию точки A на прямую a .

Не узнаете ли вы здесь известную теорему?

Задача 13. Даны три попарно перпендикулярные плоскости и треугольник, плоскость которого не перпендикулярна ни одной из данных плоскостей. Докажите, что квадрат площади данного треугольника равен сумме квадратов площадей проекций данного треугольника на данные плоскости. (Это утверждение считают пространственным аналогом теоремы Пифагора.)

Ортогональное проектирование позволяет в иных случаях понизить размерность задачи, т. е. вместо задачи в пространстве решать задачу на плоскости. Это следует из теоремы о трех перпендикулярах. В самом деле, если известно расстояние от точки до плоскости, то расстояние от нее до какой-либо фигуры на этой плоскости может быть найдено по теореме, аналогичной теореме Пифагора.

Задача 14. Пусть F — фигура на плоскости α , точка A не лежит на плоскости α , и известны расстояния от точки A до плоскости α и от точки B (проекция точки A на плоскость α) до фигуры F . Докажите, что квадрат расстояния от точки A до фигуры F равен сумме квадратов двух расстояний: от точки A до плоскости α и от точки B до фигуры F .

Задача 15. Дан единичный куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Чему равно расстояние от вершины C_1 до треугольника ABD ?

Задача 16. В двух параллельных плоскостях α и β лежат (соответственно) фигуры F и G . Известны расстояние между плоскостями и расстояние между проекцией фигуры F на плоскость β и фигурой G . Как найти расстояние между фигурами F и G ?

Задача 17. Дан единичный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Чему равно расстояние между треугольниками ABD и CKL , где точка K — середина $B_1 C_1$, а точка L — середина $C_1 D_1$?

До сих пор рассматривались в основном ограниченные фигуры и их проекции. Интересно посмотреть, какой может быть проекция неограниченной фигуры, в первую очередь, угла.

Задача 18. Какой фигурой может быть проекция угла?

Задача 19. Пусть одна сторона угла лежит в данной плоскости. Этот угол проектируется на данную плоскость.

- Какой фигурой может быть его проекция?
- Пусть данный угол — прямой. Какой вид имеет угол, являющийся его проекцией?
- Пусть данный угол — острый. Какой вид имеет угол, являющийся его проекцией?
- Пусть данный угол — тупой. Какой вид имеет угол, являющийся его проекцией?

Задача 20. Пусть одна сторона угла лежит в данной плоскости. Этот угол проектируется на данную плоскость. Рассматриваются три угла: данный угол, угол — его проекция и угол между второй стороной угла и данной плоскостью. Установите связь между этими величинами.

Задача 21. Пусть вершина угла находится вне данной плоскости, а его лучи образуют с этой плоскостью равные углы. Рассматриваются такие углы: данный угол, угол — его проекция на данную плоскость, угол с плоскостью, который образует с ней сторона данного угла, лежащая в данной плоскости.

- Установите связь между этими величинами.
- Изменится ли полученный результат, если вершина угла будет находиться в данной плоскости, а его лучи располагаться с одной стороны от нее?
- Изменится ли полученный результат, если вершина угла будет находиться в данной плоскости, а его лучи будут находиться с разных сторон от нее?

Задача 22. Пусть вершина выпуклого многогранного угла находится вне данной плоскости, а его лучи пересекают плоскость под равными углами. Докажите, что сумма его плоских углов меньше 360° . Будет ли верен этот результат в иных случаях?

Ромбокубооктаэдр (3, 4, 4, 4)
Ромбокосододекаэдр (3, 4, 5, 4)
Ромбоусеченный кубооктаэдр (4, 6, 8)
Ромбоусеченный икосододекаэдр (4, 6, 10)
Призмы (4, 4, n)
Антипризмы (3, 3, 3, n)

Один из самых простых способов построения полуправильного многогранника состоит в усечении правильного многогранника некими плоскостями.

Задача 1. Каждое ребро правильного тетраэдра делится на три равные части. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах тетраэдра, выходящих из одной и той же вершины, проводится сечение тетраэдра. Отсекается часть тетраэдра от каждой вершины до проведенного сечения.

- 1) Нарисуйте получившийся многогранник.
- 2) Определите (согласно приведенному перечню) его название.
- 3) Подсчитайте для него число вершин, ребер и граней и проверьте выполнимость теоремы Эйлера.
- 4) Можно ли описать сферу около полученного многогранника?
- 5) Можно ли вписать сферу в полученный многогранник?
- 6) Какую часть составляет объем полученного многогранника от объема исходного тетраэдра?
- 7) Можете ли вы найти самый длинный отрезок, который уместается в полученном многограннике?
- 8) Можете ли вы найти углы полученного многогранника?
- 9) Какие элементы симметрии есть у полученного многогранника?

Задача 2. Каждое ребро куба разделили на две равные части. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах куба, выходящих из одной и той же вершины, проводится сечение куба. Отсекается часть куба от каждой вершины до проведенного сечения.

- 1) Нарисуйте получившийся многогранник.
- 2) Определите (согласно приведенному перечню) его название.
- 3) Подсчитайте для него число вершин, ребер и граней и проверьте выполнимость теоремы Эйлера.

4) Найдите длину ребра полученного многогранника, если ребро куба равно 1.

5) Можно ли описать сферу около полученного многогранника?

6) Можно ли вписать сферу в полученный многогранник?

7) Какую часть составляет объем полученного многогранника от объема исходного тетраэдра?

8) Можете ли вы найти самый длинный отрезок, который помещается в полученном многограннике?

9) Можете ли вы найти углы полученного многогранника?

10) Какие элементы симметрии есть у полученного многогранника?

Задача 3. Каждое ребро куба делится на три части. При этом на каждой грани куба образуется правильный восьмиугольник. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах куба, выходящих из одной и той же вершины, проводится сечение куба. Отсекается часть куба от каждой вершины до проведенного сечения. Кроме восьмиугольных граней у этого многогранника есть грани в виде правильного треугольника.

1) Нарисуйте получившийся многогранник.

2) Определите (согласно приведенному перечню) его название.

3) Подсчитайте для него число вершин, ребер и граней и проверьте выполнимость теоремы Эйлера.

4) Найдите длину ребра полученного многогранника, если ребро куба равно 1.

5) Можно ли описать сферу около полученного многогранника?

6) Можно ли вписать сферу в полученный многогранник?

7) Какую часть составляет объем полученного многогранника от объема исходного тетраэдра?

8) Можете ли вы найти самый длинный отрезок, который помещается в полученном многограннике?

9) Можете ли вы найти углы полученного многогранника?

10) Какие элементы симметрии есть у полученного многогранника?

Задача 4. Полуправильный многогранник является частью куба. При этом каждая грань этого многогранника — правильный шестиугольник или квадрат.

1) Нарисуйте получившийся многогранник.

- 2) Определите (согласно приведенному перечню) его название.
- 3) Подсчитайте для него число вершин, ребер и граней и проверьте выполнимость теоремы Эйлера.
- 4) Найдите длину ребра полученного многогранника, если ребро куба равно 1.
- 5) Можно ли описать сферу около полученного многогранника?
- 6) Можно ли вписать сферу в полученный многогранник?
- 7) Какую часть составляет объем полученного многогранника от объема исходного тетраэдра?
- 8) Можете ли вы найти самый длинный отрезок, который уместается в полученном многограннике?
- 9) Можете ли вы найти углы полученного многогранника?
- 10) Какие элементы симметрии есть у полученного многогранника?

Задача 5. Полуправильным многогранником является правильная призма, у которой все ребра равны. Рассмотрим правильную треугольную призму, у которой все ребра равны.

- 1) Можно ли описать сферу около этого многогранника?
- 2) Можно ли вписать сферу в этот многогранник?
- 3) Какова длина самого длинного отрезка, который уместается в этом многограннике?
- 4) Какие элементы симметрии есть у полученного многогранника?

Покажем, как можно получить из правильной треугольной призмы антипризму — один из видов полуправильного многогранника.

Шаг 1. Одно из оснований правильной треугольной призмы поворачиваем вокруг своего центра на 60° .

Шаг 2. Каждую вершину нижнего основания и каждую вершину верхнего основания соединяем отрезками с двумя ближайшими вершинами другого основания.

Шаг 3. В полученном многограннике сделаем все ребра равными.

Аналогично можно построить антипризму из других правильных призм.

Задача 6. 1) Нарисуйте полуправильную треугольную антипризму.

2) Подсчитайте для антипризмы число вершин, ребер и граней и проверьте выполнимость теоремы Эйлера.

- 3) Можно ли описать сферу около антипризмы?
- 4) Можно ли вписать сферу в антипризму?
- 5) Можете ли вы найти самый длинный отрезок, который помещается в антипризме?
- 6) Можете ли вы найти углы у антипризмы?
- 7) Какие элементы симметрии имеются у антипризмы?

Проект 9

Коническое отверстие

Темы: ■ Основы тригонометрии ■ Многогранники и круглые тела ■ Уравнения и неравенства

Пусть в монолитной детали выточено коническое отверстие (внутренний конус).

Как измерить угол α — раствор конуса (рис. 176)?

В руководстве по техническим измерениям рекомендуется заложить в отверстие шарик диаметром d и глубиномером измерить глубину l , на которую он опустится (рис. 177).

Задача 1. Как найти l , зная d и α ?

Задача 2. Почему нельзя найти α по одному измерению (d , l)?

Задача 3. Как по результатам двух измерений (d_1 , l_2 ; d_2 , l_1) найти угол α ?

Решение. Если шар вписан в конус, то в осевом сечении конуса будет равнобедренный треугольник с углом α при вершине и вписанный в него круг диаметром d (рис. 178).

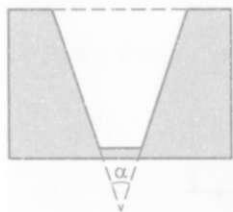


Рис. 176

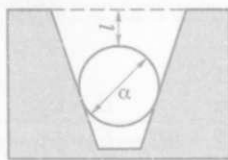


Рис. 177

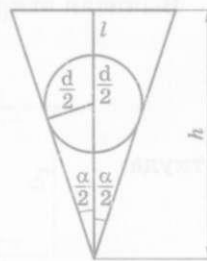


Рис. 178

Очевидно расстояние от вершины конуса до центра шара равно

$$\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

а от вершины конуса до самой удаленной (верхней) точки шара

$$\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{d}{2}.$$

Поэтому

$$l = h - \frac{d}{2} - \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

где h — высота конуса.

Отсюда видно, что l зависит не только от d и α , но и от высоты конуса h (ее, конечно, можно найти, если измерить еще какой-нибудь линейный размер конуса, например, диаметр основания).

Значит, при неизвестном h выразить α через d и l нельзя (см. задачу 2), а при известном h мы получили выражение для l (см. задачу 1).

Если были проведены два измерения, то

$$\begin{cases} l_1 = h - \frac{d_1}{2} - \frac{d_1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}; \\ l_2 = h - \frac{d_2}{2} - \frac{d_2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \end{cases}$$

Вычитая эти равенства друг из друга, получим

$$l_1 - l_2 = \frac{d_2 - d_1}{2} - \frac{d_2 - d_1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d_1 - d_2}{2(l_2 - l_1) - (d_1 - d_2)},$$

т. е. имеем решение задачи 3.

Проект 10

Средний диаметр резьбы

Темы: ■ Основы тригонометрии ■ Многогранники и круглые тела

Профиль треугольной цилиндрической резьбы (осевое сечение) показан на рис. 179.

Все треугольники равнобедренные с углом при вершине α , у метрической резьбы $\alpha = 60^\circ$, у дюймовой $\alpha = 55^\circ$; p — шаг резьбы — расстояние между соседними вершинами, т. е. основание треугольника; средний диаметр D_2 — расстояние между средними линиями треугольников в противоположных рядах; внутренний диаметр D_1 — расстояние между основаниями (p и α считаются известными).

Задача 1. Как связаны D_1 и D_2 ?

Решение. Высота равнобедренного треугольника с основанием p и углом при вершине α есть

$$h = \frac{p}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

При переходе от D_1 к D_2 сверху и к D_1 снизу добавляется по отрезку $\frac{h}{2}$:

$$D_2 = D_1 + h = D_1 + \frac{p}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Для измерения D_2 в руководстве по техническим измерениям рекомендуется использовать три специальные измерительные проволочки известного диаметра d . Они закладываются во впадины резьбы с двух сторон, и микрометром измеряется расстояние M между их выступающими точками (рис. 180).

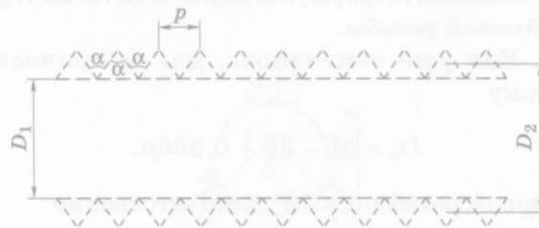


Рис. 179

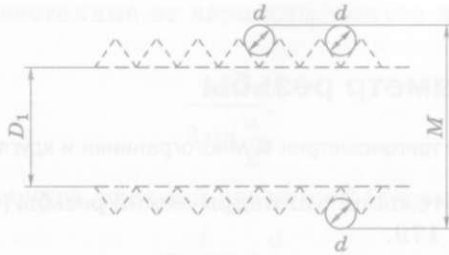


Рис. 180

Задача 2. Как найти D_2 , зная M , p и α ?

Решение. Очевидно, расстояние M измеряется по перпендикуляру к оси цилиндра. Поэтому M отличается от D_1 добавлением двух отрезков (сверху и снизу), равных расстоянию от вершины угла раствора α до самой дальней точки вписанного круга диаметра d . В задаче 3 проекта 9 это расстояние было найдено и оно равно

$$\frac{d}{2} + \frac{d}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$M = D_1 + d + \frac{d}{\sin \frac{\alpha}{2}} = D_2 - \frac{p}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + d + \frac{d}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда

$$D_2 = M - d \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) + \frac{p}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 3. Выпишите формулы пересчета M на D_2 для метрической и дюймовой резьбы.

Решение. Как уже отмечалось, для метрической резьбы $\alpha = 60^\circ$, поэтому

$$D_2 = M - 3d + 0,866p.$$

Для дюймовой резьбы $\alpha = 55^\circ$, соответственно

$$D_2 = M - 3,165d + 0,9605p.$$

Проект 11

Расточка эксцентриков

Темы: ■ Развитие понятия о числе ■ Основы тригонометрии ■ Многогранники и круглые тела ■ Уравнения и неравенства

На токарном станке подлежащая обработке деталь зажимается в трехкулачковый патрон, кулачки которого синхронно перемещаются по радиальным направляющим под углом 120° друг к другу (рис. 181).

Конечно, при этом ось шпинделя станка приходится на центр детали. Чтобы обточить отверстие, сдвинутое в сторону от центра круглой детали, под один кулачок подкладывается плашка. Центр детали O смещен относительно центра патрона O' на величину l (рис. 182).

Задача 1. Пусть диаметр детали равен d ; смещение центра равно l . Какой толщины h нужно подложить плашку?

Решение. Рассмотрим треугольник $AO'O$ (рис. 183).

Так как O — центр детали, то $|AO| = \frac{d}{2}$, $|OO'| = l$ и очевидно $\angle AO'O = 60^\circ$.

Отсюда найдем третью сторону $|AO'| = r$ — расстояние от кулачков до центра патрона. По теореме косинусов

$$\frac{d^2}{4} = r^2 + l^2 - 2lr \cos 60^\circ = r^2 - lr + l^2.$$

Это квадратное уравнение для r :

$$r^2 - lr + l^2 - \frac{d^2}{4} = 0.$$

Так как $l < \frac{d}{2}$, это уравнение имеет корни разных знаков, из которых нам нужен положительный:



Рис. 181

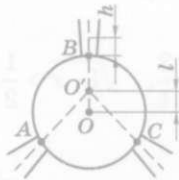


Рис. 182

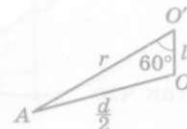


Рис. 183

$$r = \frac{l}{r} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - l^2 + \frac{d^2}{4}} = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{3}{4}l^2}.$$

Очевидно $|O'B| = r - h$. В то же время $|O'B| = |OB| - |OO'| = \frac{d}{2} - l$, откуда

$$r - h = \frac{d}{2} - l, \quad h = r - \frac{d}{2} + l;$$

$$h = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{3}{4}l^2} + \frac{3}{4}l - \frac{d}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 - 3l^2} - d + 3l).$$

Ясно, что такая формула неудобна на практике. Но обычно l мало ($l \ll \frac{d}{2}$).

Задача 2. Упростите формулу для h при $l \ll \frac{d}{2}$.

Решение. Как известно, $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ при малых x , поэтому

$$\sqrt{d^2 - 3l^2} = d\sqrt{1 - 3\frac{l^2}{d^2}} \approx d\left(1 - \frac{3}{2}\frac{l^2}{d^2}\right).$$

Отсюда

$$h \approx \frac{1}{2}\left(d - \frac{3}{2}\frac{l^2}{d} - d + 3l\right) = \frac{3}{2}l\left(1 - \frac{l}{2d}\right).$$

Задача 3. Оцените точность определения h по приближенной формуле, полученной в задаче 2.

Решение. Ясно, что

$$\sqrt{1-x} < 1 - \frac{x}{2}.$$

С другой стороны,

$$1 - \frac{x}{2} - \sqrt{1-x} = \frac{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - (1-x)}{1 - \frac{x}{2} + \sqrt{1-x}} = \frac{x^2}{4\left(1 - \frac{x}{2} + \sqrt{1-x}\right)}.$$

Имеем

$$x = 3\left(\frac{l}{d}\right)^2 < \frac{3}{4}, \quad \sqrt{1-x} > \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{x}{2} > \frac{1}{2},$$

так что

$$1 - \frac{x}{2} - \sqrt{1-x} \leq \frac{x^2}{4}.$$

Приближенное значение для h слегка завышено, но отклонение не превышает

$$\Delta h \leq \frac{1}{2} \frac{d}{4} \left(3 \frac{l^2}{d^2} \right)^2 = \frac{9}{8} l \left(\frac{l}{d} \right)^3.$$

Проект 12

Сферическое и параболическое зеркала

Темы: ■ Основы тригонометрии ■ Начала математического анализа ■ Многогранники и круглые тела ■ Уравнения и неравенства

В школьном учебнике по физике о сферическом зеркале говорится следующее. Луч I , идущий от отдаленного источника света, отразившись от зеркала Z , обязательно пройдет через точку F на оптической оси OA . Расстояние AF между фокусом F и вершиной зеркала называется фокусным расстоянием f (рис. 184).

Наоборот, если в фокус F поместить источник света, то все лучи источника, отразившись, образуют параллельный пучок. На этом основано действие прожектора.

Рассмотрим действие сферического зеркала подробнее.

Пусть на сферическое зеркало радиуса R падает параллельный пучок света диаметром $2a$, ось которого проходит через центр сферы.

Задача 1. Луч I падает на зеркало параллельно оси пучка на расстоянии a от нее. Через какую точку F на оси он пройдет после отражения (рис. 185)?

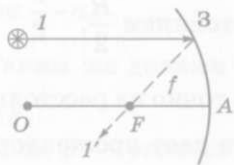


Рис. 184

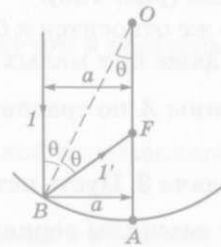


Рис. 185

Решение. Если B — точка падения луча, то так как падающий I и отраженный I' лучи должны образовывать равные углы с радиусом, треугольник OFB — равнобедренный и

$$|OF| = \frac{R}{2\cos\theta}.$$

С другой стороны, $a = R\sin\theta$, откуда

$$|OF| = \frac{R}{2\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}}}.$$

Видим, что положение точки F зависит от расстояния a , лучи с разными a будут пересекать ось в разных точках, и общего фокуса зеркало не имеет.

Почему же в учебнике написано, что фокус есть?

Задача 2. Упростите выражение для $|OF|$ и $|AF|$ при $a \ll R$.

Решение. $\sqrt{R^2 - a^2} = R\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} \approx R\left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right)$.

$$|OF| \approx \frac{R}{2 - \left(\frac{a}{R}\right)^2} \approx \frac{R}{2} + \frac{R}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2,$$

$$|AF| = r - |OF| \approx \frac{R}{2} - \frac{R}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^2.$$

Таким образом, при малых a $|AF|$ почти постоянно и равно $\frac{R}{2}$. Сферическое зеркало фокусирует только узкие (параксиальные) пучки лучей, поэтому прожектор будет хорошо работать, только если его диаметр D мал по сравнению с радиусом кривизны R зеркала (рис. 186).

То же относится к большим телескопам-рефлекторам. Но все-таки даже при малых a точка F будет слегка смещена в сторону вершины A по сравнению с фокусным расстоянием $\frac{R}{2}$.

Задача 3. Пусть источник света помещен точно на расстоянии $\frac{R}{2}$ от вершины зеркала. Какой пучок света дает прожектор — сходящийся или расходящийся?

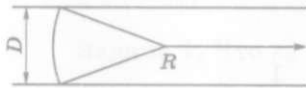


Рис. 186

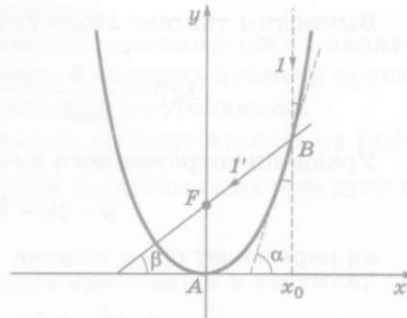


Рис. 187

Решение. Итак, $|AF| < \frac{R}{2}$. Луч FB после отражения станет вертикальным. Действительный же луч образует меньший угол с радиусом OB , а потому после отражения он пройдет ближе к центру зеркала. Пучок будет сходящимся.

Каким же должно быть зеркало, чтобы оно точно фокусировало параллельный пучок лучей в одну точку? Ответ известен с древности: зеркало должно быть параболическим, получаться вращением вокруг оси не окружности, а параболы. Попробуем разобраться в этом.

Рассмотрим стандартную параболу $y = x^2$. Пусть на нее падает вертикальный луч света I сверху вдоль прямой $x = x_0$ и отражается от параболы (рис. 187).

Задача 4. В какой точке F отраженный луч I' пересечет ось параболы?

Решение. Пусть α — угол наклона касательной к параболе в точке $B(x_0, y_0)$ к оси x . Хорошо известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = 2x_0$ (а $y_0 = x_0^2$).

Значит, угол, образованный падающим лучом и касательной, равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Таким же должен быть угол с касательной отраженного луча BF .

Если β — угол BF с осью x , то по теореме о внешнем угле треугольника $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha$. Откуда $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Вычислим тангенс этого угла:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = -\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4x^2 - 1}{4x_0}.$$

Уравнение отраженного луча

$$y - y_0 = \operatorname{tg} \beta (x - x_0),$$

он пересекает ось y в точке

$$y = y_0 - x_0 \beta = x_0^2 - \frac{4x_0^2 - 1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Итак, $|AF| = \frac{1}{4}$ не зависит от x_0 , т. е. положение точки F не зависит от x_0 .

Таким образом, параболическое зеркало действительно фокусирует параллельные лучи в одну точку — фокус.

Идеальный прожектор и идеальный телескоп должны иметь параболическое зеркало. Но большое параболическое зеркало изготовить трудно, поэтому только автомобильные и велосипедные фары имеют параболическую форму. Прожекторы и телескопы приходится делать сферическими.

Проект 13

Деление круга

Темы: ■ Основы тригонометрии ■ Многогранники и круглые тела

В практике слесарного дела при разметке деталей часто возникает необходимость разделить окружность на n равных частей, т. е. построить правильный n -угольник. Хотя разметчик может пользоваться таблицами, основные его инструменты — циркуль и линейка. Хорошо известно, что циркулем и линейкой можно построить лишь очень немногие правильные n -угольники: 5, 6, 8, 10, 12, 16, 17, 20-угольники, но 7, 9, 11, 13, 14, 15, 18, 19-угольники построить нельзя. Точное построение 10-угольника или 12-угольника возможно, но достаточно трудно. Поэтому в разметке приходится прибегать к приближенным построениям. Рассмотрим несколько таких модельных построений, применяемых в слесарном деле.

Модель 1. Таблица деления круга.

Приводится таблица (с четырьмя знаками после запятой) коэффициентов, на которые нужно умножить диаметр круга D , чтобы получить сторону a_n правильного n -угольника.

После этого достаточно сделать на окружности из произвольной ее точки засечку радиусом a_n , чтобы получить дугу в $\frac{1}{n}$ полной окружности.

Задача 1. Что за коэффициенты приводятся в таблице?

Решение. Как известно, $a_n = 2R \sin \frac{\pi}{n} = D \sin \frac{\pi}{n}$, так что рассматриваемая таблица — это таблица $\sin \frac{\pi}{n}$, $n = 2, 3, \dots$

Модель 2. Челябинская линейка.

Для деления круга применяют замечательно простой инструмент — челябинскую линейку (рис. 188) — это две одинаковые линейки, соединенные шарнирно.

На линейках нанесена одинаковая (неравномерная) шкала с метками 5, R , 7, 8, ... Расстояние от оси шарнира до одноименных меток на обеих линейках одинаково.

Чтобы разделить окружность, раздвинем линейки так, чтобы расстояние $R - R$ стало равно радиусу окружности. Тогда расстояние 5 — 5 равно стороне правильного вписанного 5-угольника, 7 — 7 — стороне 7-угольника и т. д.

Задача 2. Почему на линейке нет пары меток 6 — 6?

Ответ: сторона правильного 6-угольника равна радиусу ($a_6 = R$), поэтому искать ее не нужно, а на линейке 6-угольнику отвечает исходная пара меток $R - R$.

Задача 3. Пусть расстояние от вершины линейки до метки l равно l . На каком расстоянии от вершины находится метка n (рис. 189)?

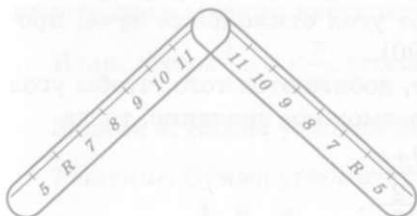


Рис. 188

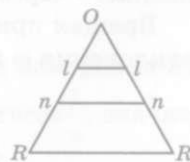


Рис. 189

Решение. Метки $R-R$, $l-l$ и $n-n$ отсекают от вершины линейки O три подобных треугольника, поэтому

$$\frac{|On|}{|OR|} = \frac{a_n}{R} = 2 \sin \frac{\pi}{n};$$

$$\frac{|Ol|}{|OR|} = \frac{a_l}{R} = 2 \sin \frac{\pi}{l},$$

откуда

$$|On| = l \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{l}}.$$

Задача 4. На одной из линеек по ошибке все расстояния вида $|On|$ уменьшили в два раза, а на другой они остались прежними. Можно ли пользоваться таким инструментом?

Ответ: да, потому что треугольники из решения задачи 3 останутся подобными, хотя уже и не будут равнобедренными. Значит, отношение их оснований не изменится.

Проект 14

Показатель преломления призмы

Темы: ■ Основы тригонометрии ■ Начала математического анализа ■ Уравнения и неравенства

В руководстве по контролю оптических деталей описан следующий метод измерения показателя преломления стекла n . Из стекла изготавливается призма с двугранным углом θ . При этом берут $\theta = 60^\circ$, если показатель преломления $n \leq 1,65$, и $\theta = 40^\circ$, если $n > 1,62$. Призму устанавливают на гониометр (устройство для измерения углов) и измеряют угол отклонения луча, прошедшего через призму I'' (рис. 190).

Вращая призму на гониометре, добиваются того, чтобы угол отклонения ω имел наименьшее возможное значение, тогда

$$n = \frac{\sin \frac{\theta + \omega}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Попробуем разобраться в этой методике и обосновать правило измерения.

По закону преломления при переходе света из воздуха в стекло с показателем преломления n : $\sin i = n \sin r$, где i — угол падения (угол между лучом и нормалью к поверхности стекла в воздухе); r — угол преломления (угол между лучом и нормалью к поверхности в стекле).

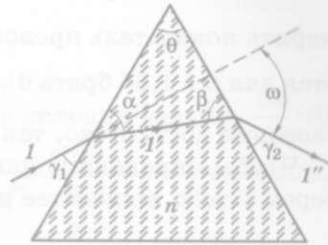


Рис. 190

Задача 1. Какими соотношениями связаны углы α , β , γ_1 , γ_2 и θ на рис. 190?

Решение. Поскольку α , β , γ_1 , γ_2 — углы лучей не с нормальями, а с гранями призмы, закон преломления для обеих граней запишется так:

$$\cos \gamma_1 = n \cos \alpha, \quad \cos \gamma_2 = n \cos \beta,$$

так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Кроме того, $\alpha + \beta + \theta = \pi$, так как α , β и θ — углы треугольника.

Задача 2. Как выражается угол отклонения луча ω через остальные углы?

Решение. При первом преломлении луч поворачивается на угол $\alpha - \gamma_2$ по часовой стрелке, при втором — на угол $\beta - \gamma_2$ в ту же сторону.

Окончательно $\omega = \alpha + \beta - \gamma_1 - \gamma_2 = \pi - \theta - \gamma_1 - \gamma_2$.

Задача 3. В каких пределах могут изменяться углы α и β , если известно, что они острые?

Решение. По симметрии, пределы α и β одинаковы.

Так как $n \cos \alpha = \cos \gamma_2$, то $\cos \alpha \leq \frac{1}{n}$, $\alpha \geq \arccos \frac{1}{n}$ (при меньшем α вместо преломления наступит полное внутреннее отражение).

$$\text{Итак, } \arccos \frac{1}{n} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \arccos \frac{1}{n} \leq \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Задача 4. Какие условия на θ необходимы для измерения n ?

Решение. Сумма углов $\alpha + \beta + \theta = \pi$, но $\alpha + \beta \geq 2 \arccos \frac{1}{n}$, значит, $\theta \leq \pi - 2 \arccos \frac{1}{n}$, $\frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{n} = \arcsin \frac{1}{n}$, $\sin \frac{\theta}{2} \leq \frac{1}{n}$.

Замечание. При $\theta = 60^\circ$ $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ и такой призмой нельзя измерить показатель преломления, близкий к 2. Поэтому и требуется для $n > 1,65$ брать $\theta = 40^\circ$, когда $\sin \frac{\theta}{2} = 0,342 = \frac{1}{2,92}$, чего уже заведомо достаточно, так как у оптического стекла $n \leq 2,4$.

Чтобы определить наименьшее возможное значение ω , выберем угол α в качестве независимой переменной.

Задача 5. Выразите ω через α и β и найдите область определения функции $\omega(\alpha)$.

Решение. Угол отклонения луча ω (см. задачу 2) $\omega = \pi - \theta - \gamma_1 - \gamma_2 = \pi - \theta - \arccos(n \cos \alpha) - \arccos(n \cos \beta)$.

Область определения функции $\omega(\alpha)$:

$$\arccos \frac{1}{n} \leq \alpha \leq \pi - \theta - \arcsin \frac{1}{n}.$$

Задача 6. Найдите $\frac{d\omega}{d\alpha}$.

Решение. Так как $\beta = \pi - \theta - \alpha$, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = -\frac{n \sin \alpha}{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \alpha}} + \frac{n \sin \beta}{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \beta}}.$$

Задача 7. Как ведет себя функция $\omega(\alpha)$ на концах области определения?

Решение. Несмотря на то что при $\cos \alpha = \frac{1}{n}$ или $\cos \beta = \frac{1}{n}$ производная становится бесконечной, когда $\alpha > \arccos \frac{1}{n}$ и очень близко к этому значению, знаменатель первого слагаемого выражения $\frac{d\omega}{d\alpha}$ будет очень мал, а все оно отрицательно и очень велико.

Второе же слагаемое при $\alpha = \arccos \frac{1}{n}$, $\beta = \pi - \theta - \arccos \frac{1}{n}$ особенности не имеет.

Значит, $\frac{d\omega}{d\alpha} < 0$ при $\alpha \approx \arccos \frac{1}{n}$ и на левом конце промежутка функция $\omega(\alpha)$ убывает.

На правом конце, где $\cos \beta \approx \frac{1}{n}$, слагаемые меняются местами, там $\frac{d\omega}{d\alpha} > 0$ и функция $\omega(\alpha)$ возрастает.

Таким образом, у функции $\omega(\alpha)$ где-то внутри области определения обязательно есть минимум.

Задача 8. Решите уравнение $\frac{d\omega}{d\alpha} = 0$.

Решение. Уравнение, приведенное в условии задачи, $\frac{d\omega}{d\alpha} = 0$ равносильно уравнению $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-n^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1-n^2 \cos^2 \beta}}$ и очевидным решением будет случай $\alpha = \beta$, т. е. $\alpha = \beta = \frac{\pi - \theta}{2}$.

Других решений с $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ нет, так как если $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-n^2 \cos^2 \alpha}} = y > 0$, то $\sin^2 \alpha = y^2 - n^2 y^2 \cos^2 \alpha = y^2(1 - n^2) + n^2 y^2 \sin^2 \alpha$ и $(n^2 y^2 - 1) \sin^2 \alpha = y^2(n^2 - 1)$, откуда $\sin \alpha, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, определяется при $n \neq 1$.

Итак, функция $\omega(\alpha)$ имеет лишь одну критическую точку в области определения, а так как функция должна иметь минимум, то эта точка и будет являться минимумом.

Наименьшее значение ω достигается в симметричной конфигурации, когда $\alpha = \beta$, и преломленный луч в стекле перпендикулярен биссектрисе двугранного угла призмы.

Задача 9. Чему равно минимальное значение ω ?

Решение. Поскольку

$$\omega = \pi - \theta - 2 \arccos \left(n \cos \frac{\pi - \theta}{2} \right) = \pi - \theta - 2 \arccos \left(n \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

имеем

$$\frac{\theta + \omega}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(n \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad \sin \frac{\theta + \omega}{2} = n \sin \frac{\theta}{2}, \quad n = \frac{\sin \frac{\theta + \omega}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

т. е. получили расчетную формулу для n .

Замечание. Так как в точке экстремума $\frac{d\omega}{d\alpha} = 0$, значение ω мало чувствительно к малой погрешности α , т. е. к установке призмы на гониометре.

ОТВЕТЫ

Глава 1. Развитие понятия о числе

Пропорции

1. Да, если $a \neq 0$, $x \neq 0$. 2. $8\,000\text{ м}^2$; $12\,000\text{ м}^2$. 3. $\frac{m \cdot n}{m+n}$ дней. 4. 80 пакетов.
5. 6 дихремов. 6. 0,6; 0,8; 2,6. 7. 5 пиастров. 8. 72 см. 9. а) $\frac{12}{5}$; б) $\frac{19}{5}$;
в) $\frac{15}{8}$; г) уменьшается. 10. а) свинец — 140, олово — 210, железо — 350;
б) свинец — $87\frac{1}{2}$; олово — $145\frac{5}{6}$; железо — $466\frac{2}{3}$; в) свинец — 100,
олово — 200, железо — 400. 11. 28 дет./ч. 12. 429 дет. 13. 24 ч; 48 ч.
14. 25 г. 15. $\frac{8}{3}$.

Проценты

16. $9\frac{1}{11}\% \approx 9,09\%$. 17. Нет. 18. 44%; 20%. 19. 80 и 50. 20. 20%; 25%.
21. 36 р. 80 к. 22. 6. 23. 25%. 24. 100 р. 25. Примерно на 20% увели-
чился. 26. Подорожал на 4,5%. 27. Нет. 28. Нет (до 17%). 29. 38,2%.
30. На 4%. 31. Более чем на 33%.

Округление чисел

32. 1) 0,28; 2) 0,333; 3) 0,286. 33. 1) 140; 137; 137,3; 137,31; 137,308;
137,3085. 5) 1; 1,4; 1,36; 1,364. 34. 1) $6,36 \cdot 10^5$; 3) $1,23 \cdot 10^{10}$; 6) $3,03 \cdot 10^{-2}$.
35. 1) $7,351 \cdot 10^4$; 6) $5,016 \cdot 10^2$; 11) $3,257 \cdot 10^8$. 36. 1) 20 девяток; 2) 20 ну-
лей; 3) 20 девяток; 4) 20 нулей.

Оценки и погрешности

37. 1) $2x + 3y < 19$; 5) $\frac{1}{y} < \frac{1}{2}$; 9) $3x - 2y < 11$. 38. 1) $5x + 3y > 6$; 5) $(x^2 + 1) \times$
 $\times (y^2 - 1) > 3$; 9) $x^3 + y^3 > 8$. 39. 615 км; ± 5 км. 40*. а) от 1 до 9; б) от 0
до 10; от 0 до 12,5. 41. а) от 44,5 до 45,9 м²; б) от 10,067 до 10,204 м.
42. а) 15 м; б) 13 дм. 43. а) 24 дм; б) 28 дм; в) 34 дм; г) 38 дм; д) 42 дм;
е) 48 дм. 44. а) 24 дм; б) 28 дм; в) 38 дм; г) 42 дм; д) 17 дм. 45. 1) 1,0%;
3) 0,0%; 5) 0,1%. 46. 1) $h = 23$, $r = 0,046$; 5) $h = 0,004$, $r = 0,0054$;
9) $h = 350$, $r = 0,0583$.

Приближенные вычисления

49. 0,45 %. 50. Скорость света. 51. 0,3 %. 52. 4,2 %.

Глава 2. Корни, степени и логарифмы

Приближенные вычисления

1. 1) 1,02; 3) 0,98; 5) 1,22; 7) 7,69; 9) 0,002; 11) 0,08.

Сложные проценты

4. $2,03 \cdot 10^5$ человек. 5. 40 000 р. (с точностью до 1 000). 6. 6 % (с точностью до 1 %). 7. в) примерно через четыре с четвертью года (4,25 года). 8. 48 г. 9. 60:40. 10. а) 2:1; б) 90 %.

Уравнение показательного роста

11. $\lg 2$. 12. $6 \log_2 10$. 13. $h = -\frac{1}{H} \ln \frac{p}{p_0}$. 14. 100 дБ. 15. $\frac{t}{\log_2 \frac{m}{n}}$. 16. \sqrt{e} .
17. $\log_2 10$; $\approx 0,64$; 18. $1,05 \cdot 10^6$; 19. 1 600 м.

Глава 3. Прямые и плоскости в пространстве

Вычисление геометрических величин

1. С помощью теоремы косинусов. 2. а) найти апофему и радиус вписанной в основание окружности; б) найти высоты боковых граней, затем угол между ними. 3. а) достаточно знать только сторону основания; площадь сечения в 4 раза меньше площади основания; б) найти высоту основания; в) см. выше задачу 2 б; г) *указание*: докажите, что площадь сечения составляет $\frac{4}{9}$ площади боковой грани; д) четверть произведения бокового ребра на сторону основания. *Указание*: докажите, что это сечение есть прямоугольник. 5. *Указание*: докажите, что сумма квадратов косинусов углов между лучом и ребрами трехгранного угла равна 1. 6. *Указание*: воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

Геометрия на местности

9. 2,5. 11. Взять, например, расстояния l_1, l_2, l_3 через равные промежутки времени (известные) t . Тогда l_1 и l_3 — стороны треугольника; l_2 — его медиана. С помощью теоремы косинусов найти третью сторону и разделить на удвоенное время t : $v = \frac{\sqrt{l_1^2 + l_3^2 - 2l_2^2}}{\sqrt{2}t}$. 12. Можно. 13. *Указание*. Считая, что высота дерева известна, можно измерить углы, которые составляют с деревом направления на берега реки. Лучи этих направлений должны идти в вертикальной плоскости. После чего задача становится планиме-

трической — требуется решить треугольник по стороне и углам. 14. *Указание.* Для этого достаточно сделать планку стороной прямоугольника, параллельной поверхности земли, а сам прямоугольник расположить так, чтобы его плоскость была перпендикулярна поверхности земли. 16. *Указание:* достаточно высоту предмета разделить на тангенс угла наклона солнечных лучей к плоскому участку Земли. 18. Возможны оба варианта. 19. а) $\frac{R}{2}$; б) $\frac{R}{4}$ (R — радиус Земли). 20. На 10 см. 21. 45° или 135° . 23. *Указание.* К концам лески привяжем два поплавка, а между ними грузило. Эту конструкцию забросим в воду. Грузило ляжет на дно, поплавки всплывут. Зная расстояние от грузила до поплавков и оценив на глаз расстояние между поплавками, найдем три стороны полученного треугольника. Затем воспользуемся формулой Герона. 24. *Указание.* а) измерим два расстояния до самолета через промежуток времени t . Тогда путь, пройденный самолетом, можно получить из теоремы косинусов; б) измерим расстояние до самолета из двух точек вертикального объекта, расстояние между которыми известно, причем одна из них находится на поверхности земли. В полученном треугольнике известны три стороны. После этого можно найти высоту самолета как высоту этого треугольника. 25. Нужно соединить концы противоположных ножек натянутыми нитями. Если при этом нити пересекутся, то стол устойчив (его поверхность может быть не параллельна плоскости пола).

Глава 4. Комбинаторика

Оценка числа возможных вариантов

1. 729. 2. 16; 12. 3. 151 200. 4. 240. 5. 24. 6. 1) 32^3 ; 3) 32^6 ; 5) $32 \cdot 31^4$; 7) 32^3 ; 9) 31^5 . 7. $33^3 \cdot 10^3$. 8. 7^{10} . 9. 3^7 . 10. n^N . 11. 13^{10} . 12. 58 800. 13. $2C_{98}^6 + C_{98}^5$. 14. $C_n^0 C_n^{2k} + C_n^1 C_n^{2k-1} + \dots + C_n^m C_n^{2k-m} + \dots + C_n^{2k} C_n^0$. 15. Количество последовательностей равно 2^{30} . Далее воспользуемся неравенством $2^{10} = 1024 > 1000$. 17. Самое длинное слово состоит из 7 букв. 18. Не менее 15. 19. Количество чисел, не делящихся на 3, равно $6 \cdot 10^3$. Столько же чисел, делящихся на 2 или на 3. *Ответ:* поровну. 20. Одинаково. 21. $n > 9$. 22. C_{14}^7 . 23. $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$. 24. а) 1; б) 258; в) 13 545; г) 246 820; д) C_{43}^6 . 25. 10. 27. 5. 28. 32. 30. 3.

Глава 5. Координаты и векторы

Векторы в физике

13. $F_{BC} = 42 \cos 50^\circ$; $F_{AB} = 21 \cos 10^\circ$. 14. $F = 8$ Н. 15. $F = \sqrt{7}$ Н. 16. $F = \sqrt{4 + (3 - \sqrt{3})^2}$. 17. $A = 2500(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ Дж. 18. $F = 49\sqrt{2}$ Н. 19. Можно. 20. *Указание.* Достаточно закрепить мачту равными тросами. Один конец этих тросов должен быть закреплен в фиксированной точке мачты, а другие концы этих тросов можно закрепить на поверхности земли в вершинах квадрата. 21. *Указание.* Достаточно закрепить кольцо в че-

тырех точках равными тросами, причем точки крепления тросов на кольце находятся в вершинах квадрата. 24. $|F| = \sqrt{2} - 1$. 25. $S = 144$ м.
 26. $|F_1| = |F_2| = \frac{22,5}{\cos 50^\circ}$. 27. $F_{AB} = \frac{42}{\cos 55^\circ}$; $F_{BC} = 42 \operatorname{tg} 55^\circ$. 28. а) $\mathbf{v} = (2; -1)$;
 $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$; б) $(-5; 5)$; в) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$; г) $x = -5 + 2t$; $y = 5 - t$; д) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Глава 6. Основы тригонометрии

Вычисления в геометрии

1. 1) $c = 9,8$ см; 3) $h = 3,5\sqrt{3}$ см; 5) $a = 6$ см; $b = 8$ см; $c = 10$ см; 7) $c = 10$ см; 9) $p = 5$ см; 12) $S = 0,5$ см²; 14) $l = 6$ см. 2. 1) $BM = 14,97$ см; 3) $AC \approx 21,96$ см; 5) $\alpha \approx 54,87^\circ$; $\beta \approx 84,27^\circ$; $\gamma = 40,86^\circ$; 7) $l_a = 18,58$ см, $l_b = 10,87$ см, $l_c = 10$ см; 11) $\alpha = \frac{3\pi}{8}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$; 13) $AB = 4$ см. 3. 1) синус этого угла равен $\frac{2}{3}$; 2) $\alpha = 45^\circ$; 4) $R = 16,25$ см; 5) $r = 3,87$ см; 7) $m_{\max} = 8,54$ см, $l_{\min} = 4,85$ см; 10) $S_{\text{бок}} = 32$ [кв. ед.].

Круговое движение

4. $\frac{3\pi}{4}$. 5. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 6. $(0; -1)$ или $(-1; 0)$. 8. $t_1 = 225^\circ$, $t_2 = 345^\circ$, $t_3 = 105^\circ$;
 $\sin t_1 = -0,71$, $\cos t_1 = -0,71$; $\sin t_2 = -0,26$, $\cos t_2 = 0,97$; $\sin t_3 = 0,97$, $\cos t_3 = -0,26$. 10. а) первая встреча произошла в точке $P_{\frac{6\pi}{7}}$; остальные встречи происходили в точках $P_{\frac{6n\pi}{7}}$, $n \in \mathbf{Z}$; б) да, на седьмой встрече.

Тригонометрия на местности

13. *Указание.* Достаточно найти расстояния от вас до двух объектов на другом берегу и угол между направлениями на эти объекты. Далее использовать теорему косинусов. 14. *Указание.* Достаточно найти расстояния от вас до краев улицы и угол между направлениями на эти края. Далее использовать теорему косинусов. 15. *Указание.* Найти угол между вертикалью и направлением на горизонт. Затем рассмотрите прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза равна $R + h$, а катет, противолежащий найденному углу, равен R (R — радиус Земли; h — высота горы). 16, 17. *Указание.* Рассмотрите два круга известных радиусов, не имеющие общих точек. Проведите к ним общую касательную. 18. *Указание.* Рассмотрите круг и точку, из которой проведены две касательные к этому кругу. Изобразите данную ситуацию в виде треугольника, в котором проведена прямая от выбранной точки до центра круга, а монета представлена отрезком, перпендикулярным этой прямой и расположенным на расстоянии, соответствующем длине вытянутой руки. 19. $v = 63$ км/ч; $\alpha = 59,5^\circ$ СВ. 20. $F = 97,5$ Н; $\alpha = 21^\circ 6'$. 21. $F_1 = 17$ Н; $F_2 = 19$ Н. 22. В обоих случаях — не всегда, а только при определенных соотношениях между длиной проволоки l и нужным рас-

стоянием d : решение возможно, если а) $\frac{1}{2} \leq \frac{d}{l} < 1$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{d}{l} < 1$. 23. Указание. Рассмотрите два круга, диаметры которых соответствуют диаметрам шкивов, и две общие касательные к ним, соответствующие ремненным передачам. Длину передачи найдите как сумму длин двух касательных и двух дуг окружностей. 24. Указание. Пусть α — угол, под которым виден предмет, d — расстояние до предмета, D — его диаметр. Тогда $\alpha = 2 \arctg \frac{D}{2d}$ — убывающая функция от переменной d . 25. Можно. 26. Указание. Выразите длину стороны правильного n -угольника через радиус круга и угол, под которым эта сторона видна из центра круга. Далее рассмотрите треугольник, стороны которого — два радиуса круга и данная сторона. Примените теорему косинусов. 27. а) уменьшается; б) сказать нельзя. 28. Может. 29. Да.

Глава 7. Функции и графики

Табличное задание зависимостей

1. 1) $y = 0,4x - 2$; 5) ни одна из указанных; 9) ни одна из указанных.
2. 1) $\frac{y}{x} = -2$; $y_1 = -2$; 5) $y = 3x - 2$, $x_1 = 3$, $y_1 = 13$, $x_2 = 6$; 9) $y = 12$, x_1 — любое, $y_1 = y_2 = 12$.

Построение зависимостей

3. $S = vkt$; v — скорость; $k = \frac{2}{3}$. 6. 1) $x = \frac{k}{v}t^2$ — квадратичная функция;
3) T и V прямо пропорциональны; 5) $s = \frac{a}{2}t^2$ — квадратичная функция.
7. а) 32F; б) 212F; в) $-459,4F$. 8. 5 500 р. 9. а) 32,8°C; б) ≈ 209 тыс. °C.
11. 1) $p(a) = a + 2c$; 2) $h(a) = \frac{2S}{a}$; 3) $R(S) = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$; 4) $S(l) = \frac{l^2}{4\pi}$; 5) $a(b) = \sqrt{c^2 - b^2}$;
6) $= a$ $S(a) = \sqrt{c^2 - a^2}$; 7) $h(c) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 12. $S(x) = \frac{x^2}{2}$, если $0 \leq x \leq 1$,
 $S(x) = -\frac{x^2 - 4x + 2}{2}$, если $1 \leq x \leq 2$. Область определения $0 \leq x \leq 2$. 13. $V(t) =$
 $= 2t$, если $0 \leq t \leq 6$; $V(t) = 12$, если $6 \leq t \leq 10$. 14. $S(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; $S(r) = 3\sqrt{3}r$.
15. $S = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}$. 26. а) 1 миля = 1,6 км; б) S [мили] = S [км] · 0,6; S [км] =
 $= S$ [мили] · 1,6.

Свойства практических зависимостей

27. 1) нет; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) нет; 6) нет; 7) нет; 8) нет. 28. 1) да;
2) нет; 3) да; 4) да; 5) да; 6) да. 29. 1) нет; 2) да; 3) да; 4) да; 5) да; 6) да;
7) да; 8) наименьшее значение достигается, а наибольшее — нет; 9) наи-

меньшее значение достигается, а наибольшее — нет; 10) нет. 30. 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) нет; 5) да; 6) да; 7) нет; 8) да. 31. 1) да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) да; 6) да; 7) в нормальном состоянии — да; 8) нет; 9) да; 10) да; 11) нет; 12) да.

Глава 8. Многогранники и круглые тела

Вычисление геометрических величин

2. Это наименьшее из радиуса основания и половины высоты цилиндра. 3. а) $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$; в) $R = \frac{\sqrt{6}}{4}$. *Указание.* Найдите высоту тетраэдра, а затем отношение, в котором ее делит центр тетраэдра. 4. $H = \sqrt{L^2 - (R - r)^2}$. *Указание.* Рассмотрите осевое сечение. 5. $h = \frac{H}{R\sqrt{\pi}}(\sqrt{S} - \sqrt{s})$. 6. $r = \frac{HR}{R + \sqrt{H^2 + R^2}}$, где H, R — соответственно высота и радиус основания конуса. 7. 1) по диагонали основания; 4) ребро куба равно ребру пирамиды. 8. $\sqrt{2} : 1$. 9. $\sqrt{6} : 4$.

Развитие наглядных представлений

12. Да. 13. а) конус; б) $l = 2\pi r$, где r — проекция высоты на плоскость. 14. Шестиугольник. 15. 1) 8; 2) куб; 3) суммарная площадь больше. 22. Можно (поделить по средним линиям).

Организация практических измерений

23. Взять половину экватора. 24. 6 400 л. 25. *Указание.* Отметьте на этой окружности три точки и измерьте расстояния между ними. 29. В результате площадь куска колбасы становится больше. 30. Это диагональ осевого сечения. 32. *Указание.* Предполагаем, что бочка имеет форму цилиндра. Чтобы ее выкатить, потребуется перевести ее из вертикального положения в горизонтальное. При этом достаточно, чтобы диагональ осевого сечения цилиндра была меньше высоты помещения, а ее высота была меньше ширины помещения. 33. *Указание.* Ясно, что шести источников хватит. Однако поищите ситуацию, когда потребуется меньшее число источников. Используйте результат задачи 14. 34. Можно. 39. Да. *Указание.* Рассмотрите расстояние между скрещивающимися ребрами.

$$41. F = \frac{mgl}{2\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}}.$$

Глава 9. Начала математического анализа

Экстремальные значения геометрических величин

1. а) $v_{\text{ср}} = 3,5g$ (м/с); б) $v = 2g$ (м/с). 2. а) $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$; б) $v = x'_t = v_0 - gt$; а) $x''_t = -g$; в) через $t = \frac{v_0}{g}$ $x = \frac{v_0^2}{2g}$ (высшая точка). 3. 8 град/с. 4. Через

3 с. 5. а) $r = \sqrt{R^2 - h^2}$, $l^2 = 2R(R + h)$; б) $h = \frac{4R}{3}$; в) $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. 6. 1) $k(t) = \frac{4(2t^2 - t + 2)}{t\sqrt{3}}$. 7. $S = \frac{2}{3\sqrt{3}}aH$. 8. $a = 14$ см; $b = 21$ см. 9. $\frac{\pi}{3}$. 10. Равнобедренный. 11. Отношение меньшей стороны к большей равно $\frac{1}{2}$. 12. Это сечение — квадратное. 19. Сторона квадратика составляет $\frac{1}{6}$ стороны листа. 25. $V \approx 0,988 \approx 1$. 26. $S = \sqrt[3]{45\pi V^2}$. 27. 350 и 250 м².

Приложения к механике

28. а) $v = v_0 - gt$; в) $h = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$. 31. $v = 9$; $a = 12$. 32. $t = 1$. 33. 1) $v = \frac{2}{3}A(t+c)^{\frac{1}{3}}$. 41. $t = 0$ и $t = 2$. 39. $t = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. 40. $x(F) = \frac{F^2 - 4F + 319}{324}$.

Исследование физических процессов

45. $\alpha = 0,002$. 49. $C(T) = Q'(T) = 0,396 + 4,162 \cdot 10^{-3}T - 1,502 \cdot 10^{-6}T^2$. 53. 40,79. 54*. $18\frac{1}{3}$ кг.

Глава 10. Интеграл и его применение

Вычисление площадей и объемов

1. 1) 20; 3) 4; 5) 0,3; 7) 1; 9) 12; 11) 1,5; 13) 1; 15) $1,5 - \ln 2$; 17) $\frac{1}{2}e - 1$.
 4. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{21}$. 5. а) $V = \pi R a^2$; б) $V = \frac{\pi R a^2 \sqrt{3}}{4}$; в) $V = \pi^2 R r^2$. 6. $m = 17,3$ г. 7. $S_{\text{бок}} = ab$, $S_1 = ab + \frac{a^2}{2\pi}$; $S_2 = ab + \frac{b^2}{2\pi}$. 8. $S_{\text{бок}} = \frac{1}{4}\pi a \sqrt{4H^2 + a^2}$;
 $S_{\text{полн}} = \frac{1}{4}\pi(a\sqrt{4H^2 + a^2} + a^2)$. 9. $S_{\text{бок}} = 0,5\alpha R^2$; $S_{\text{полн}} = 0,5\alpha R^2\left(1 + 0,5\frac{\alpha}{\pi}\right)$.
 10. Выгодней второй вариант, так как объем возрастет в 8 раз, а число едоков только удвоится. 11. *Указание.* Исходите из того, что объем большого мыльного пузыря в 2 раза больше объема исходного маленького пузыря. Толщиной стенок этих пузырей можно пренебречь. 12. а) 42,3%; б) 50%. 13. Суммарная площадь поверхности крупного картофеля меньше, чем у мелкого той же массы (см. задачу 11), значит, меньшая часть уйдет в очистки. 14. $V = \frac{\pi^2}{4}(R-r)^2(R+r)$. *Указание.* Вместо бублика рассмотрите два цилиндра соответствующих размеров, вложенных друг в друга. Их можно оценить, если «развернуть» бублик так, чтобы он принял форму цилиндра. 15. $p = 144$ т.

Интеграл в физике

16. 1) 24; 3) $3\left(12 + \frac{85}{\ln 2}\right)$; 5) $e^2 - e + 2 + e^{-1} + e^{-2}$; 7) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2}{2}$; 9) $\frac{1}{3 \ln 1,5}$.
 17. $A = 551\,250\pi$ Дж. 18. $A = 2,3 \cdot 10^{12}$ Дж или $2,4 \cdot 10^8$ т-км. 19. $A = 899$ Дж. 20. $F = \rho g a^2 \frac{(a+2h)}{2}$. 22. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$. 23. $F = \frac{Gm^2}{2l^2}$, G — гравитационная постоянная. 24. Через 634 818 лет. 25. $m = m_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$. 26. $m(t) = m e^{kt}$. 27. $k = \ln 1,1$.

Наглядные представления об интеграле

30. а) $S = \int_1^5 \frac{x+3}{2} dx$; б) $S = \int_{-2}^4 (x+2)(4-x) dx$; в) $S = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx$.

Глава 11. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Вычисление статистических характеристик

1. 1) $A = 82,1$, $Me = 81$; 2) $A = 19,375$, $Me = 19$; 3) $A = 63,3$; $Me = 68,5$.
 2. Европа — 65, Африка — 17, Азия — 61, Северная и Центральная Америка — 16, Южная Америка — 15, Австралия — 3, все континенты — 34. 4. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) да; 8) да.
 5.

№ п/п	n	Ряд чисел	H_n	G_n	A_n	Q_n
1	2	1; 2	1,33	1,41	1,5	1,58
2	2	1; 100	1,98	10	50,5	70,71
3	3	5; 5; 5	5	5	5	5
4	3	1; 2; 4	1,71	2	2,33	2,65
5	4	1; 2; 3; 8	2,04	2,63	3,5	4,42

Оценка вероятности события

6. $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$. 8. $\frac{4C_9^4}{C_{36}^4} = \frac{8}{5 \cdot 11 \cdot 17} \approx 0,0086 < 0,01$. 10. Надо оценить $\left(\frac{11}{12}\right)^{10} = \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{10} \approx 0,42$. 12. $\frac{1}{2}$. 13. ≈ 111 . 14. $\frac{2}{9}$. 15. $\frac{7}{9}$. 17. Эти вероятности равны. 18. а) $C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$; б) $C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$; в) $C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1$.
 23. $\frac{1}{1296}$. 24. 0,043. 25. $\frac{35}{36}$. 26. а) $1 - p^{10}$; б) $10p^9(1-p)$; в) $45p^8(1-p)^2$.
 27. $6p^2(1-p)^2 + 4p^1(1-p)^3 + (1-p)^4$.

Глава 12. Уравнения и неравенства

Построение математической модели и ее исследование (текстовые задачи)

1. 1) 1 ч 20 мин или 1 ч 40 мин; 3) 4 ч 40 мин или 5 ч 50 мин; 4) 7 ч 30 мин и 5 ч; 5) 9:35; 9) 18 и 14. 2. 1) 8 телят; 2) 14 и 11 дней; 3) 27 верст; 4) 10 и 9 верст/ч.

Геометрические модели

12. а) $x = \sqrt{3}$; б) $x > \sqrt{7}$; в) $0 < x < 2\sqrt{6}$; г) $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$; д) $x = 1$; е) $x = 1$; ж) $x > \sqrt{3}$; з) $x = 1$; и) $0 < x < 0,5$; к) $x > 0$; л) таких x не существует; м) $0 < x < \sqrt{4,76}$; н) $x = 1$. 13. а) такое невозможно; б) $\alpha = 60^\circ$; в) $\alpha = \arctg \frac{3}{4}$; г) $0 < \alpha < 2\arcsin \frac{1}{4}$; д) $2\arctg \frac{1}{\sqrt{10}} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; е) $\alpha = 2\arctg \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cong 70,5^\circ$; ж) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; з) такое невозможно; и) $2\arctg \frac{1}{2}$; к) $2\arctg \frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; л) $0 < \alpha < 2\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$; м) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 14. а) $\alpha = 45^\circ$; б) такое невозможно; в) $0 < \alpha < \arctg \frac{1}{2}$ или $\arctg \frac{3}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; д) $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$; е) $0 < \alpha < \arctg \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$; ж) $\alpha = 45^\circ$; з) такое невозможно; и) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$; к) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 15. а) $x = 1$; б) $x = 2$; в) $x = \sqrt{3} - 1$; г) $x = \sqrt{5} - 1$; д) $x = 2$; е) $x > \frac{2}{3}$. 16. 96,6%. 17. 60° .

Приложения

Приложение 1

Основные обозначения

Общематематические символы

- $|a|$ — абсолютное значение (модуль) числа a
 $[a]$ — целая часть числа a
 $=$ — равно
 \approx — приближенно равно
 $>$ — больше
 $<$ — меньше
 $\sqrt{\quad}$ — корень квадратный
 $\sqrt[n]{\quad}$ — корень n -й степени
 \Rightarrow — следовательно
 \Leftrightarrow — равносильно, тогда и только тогда, когда

Комбинаторика

- $n!$ — n факториал
 A_n^m — число размещений из n по m
 C_n^m — число сочетаний из n по m
 P_n — число перестановок из n элементов

Множества

- \emptyset — пустое множество
 \mathbb{N} — натуральные числа
 \mathbb{Z} — целые числа
 \mathbb{Q} — рациональные числа

- \mathbf{R} — действительные числа
- \mathbf{C} — комплексные числа
- $A \cup B$ — объединение множеств
- $A \cap B$ — пересечение множеств
- $a \in A$ — a принадлежит множеству A
- $a \notin A$ — a не принадлежит множеству A
- $g \circ f$ — композиция отображений f и g

Комплексные числа

- i — мнимая единица
- \bar{z} — комплексное число, сопряженное к z
- $|z|$ — абсолютное значение (модуль) комплексного числа z

Геометрия

- $A(x; y)$ — точка A с координатами x и y
- a, b — прямые
- α, β — плоскости
- $a \parallel b$ — прямая a параллельна прямой b
- $a \div b$ — прямая a скрещивается с прямой b
- $a \perp b$ — прямая a перпендикулярна прямой b
- $a \cap \alpha = P$ — прямая a пересекает плоскость α в точке P
- $\alpha \parallel \beta$ — плоскость α параллельна плоскости β
- $\alpha \perp \beta$ — плоскость α перпендикулярна плоскости β
- $\mathbf{a}, \overline{AB}$ — вектор

Последовательность и функции

- $\{a_n\}$ — последовательность
- Δf — приращение функции f
- df — дифференциал функции f
- $f'(x)$ — производная функции f в точке x
- $\int f(x)dx$ — множество первообразных, или неопределенный интеграл функции f
- $\int_a^b f(x)dx$ — определенный интеграл функции f от a до b

Приложение 2

Постоянные величины

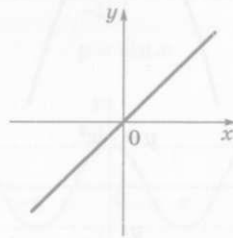
Величина	Числовое значение	Величина	Числовое значение
π	3,141592654	e	2,718281828
$\pi/2$	1,570796327	\sqrt{e}	1,648721271
π^2	9,869604401	$1/e$	0,367879441
$\sqrt{\pi}$	1,772453851	$1/\sqrt{e}$	0,606530660
$\ln \pi$	1,144729886	e^π	23,140692633
$\sqrt{2}$	1,414213562	$\sqrt[3]{2}$	1,259921050
$\sqrt{3}$	1,732050808	$\sqrt[3]{3}$	1,442249570
$\sqrt{5}$	2,236067977	$\sqrt[3]{4}$	1,587401052
$\sqrt{6}$	2,449489743	$\sqrt[3]{5}$	1,709975947
$\sqrt{7}$	2,645751311	$\sqrt[3]{6}$	1,817120593
$\sqrt{8}$	2,828427125	$\sqrt[3]{10}$	2,154434690
$\sqrt{10}$	3,162277660	$\sqrt[3]{100}$	4,641588834
1 радиан	57° 17' 44,8"	1°	0,017453293 радиан

Таблица производных элементарных функций

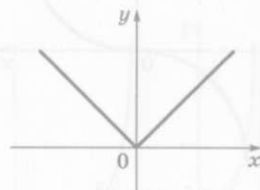
1. $c' = 0$		
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbf{R}$		
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$		
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$		
5. $(\sin x)' = \cos x$		
6. $(\cos x)' = -\sin x$		
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$		
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$		
9. $(e^x)' = e^x$		
10. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$		
11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$		
12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$		
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$		
16. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$		

Приложение 4

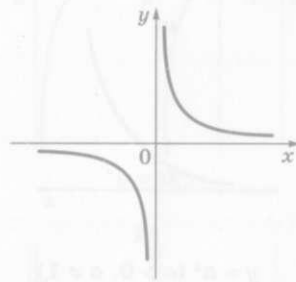
Графики элементарных функций



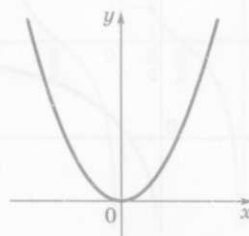
$$y = x$$



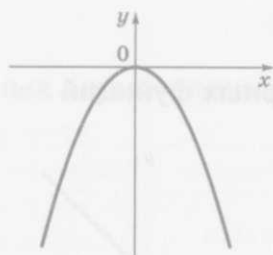
$$y = |x|$$



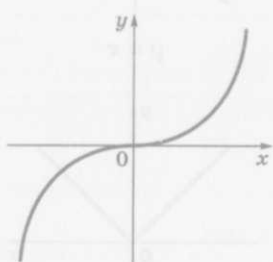
$$y = \frac{1}{x}$$



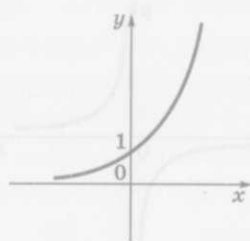
$$y = x^2$$



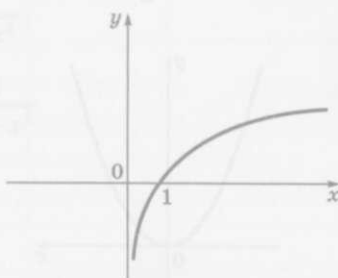
$$y = -x^2$$



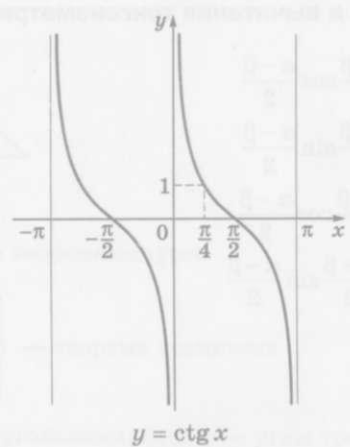
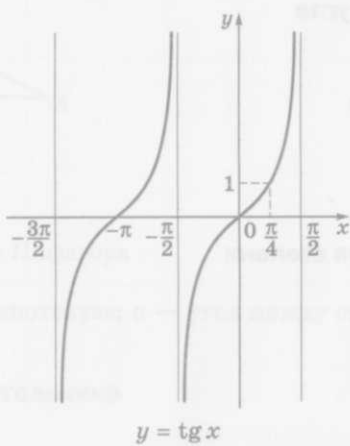
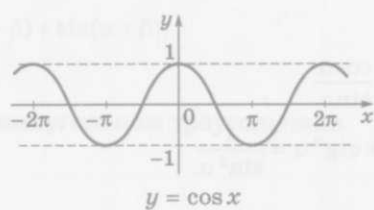
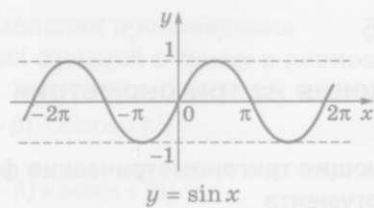
$$y = x^3$$



$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$



$$y = \log_a x \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$$



Приложение 5

Некоторые сведения из тригонометрии

Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Формулы сложения и вычитания тригонометрических функций

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

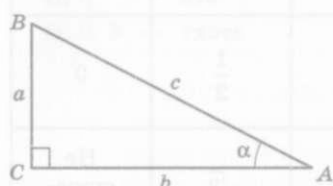
Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Соотношения в прямоугольном треугольнике



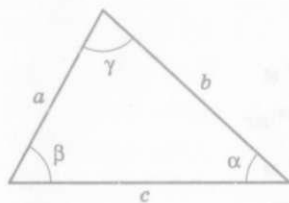
$$a = c \sin \alpha, a = b \operatorname{tg} \alpha$$

$$b = c \cos \alpha, b = a \operatorname{ctg} \alpha$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ — теорема Пифагора}$$

a, b — катеты; c — гипотенуза; α — угол между сторонами b, c

Соотношения в треугольнике



$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \text{ — теорема синусов}$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \right\} \text{ — теорема косинусов}$$

a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — углы треугольника

Приложение 6

**Значения тригонометрических функций
для наиболее распространенных углов**

Функция	Значение				
	$t = 0$	$t = \frac{\pi}{6}$	$t = \frac{\pi}{4}$	$t = \frac{\pi}{3}$	$t = \frac{\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не суще- ствует
$\operatorname{ctg} t$	Не суще- ствует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Приложение 7

Астрономические величины

Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,49 \cdot 10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3,84 \cdot 10^8$ м

Приложение 8

Греческий алфавит

Α, α	— альфа	Ι, ι	— йота	Ρ, ρ	— ро
Β, β	— бета	Κ, κ	— каппа	Σ, σ	— сигма
Γ, γ	— гамма	Λ, λ	— ламбда	Τ, τ	— тау
Δ, δ	— дельта	Μ, μ	— мю	Υ, υ	— ипсилон
Ε, ε	— эпсилон	Ν, ν	— ню	Φ, φ	— фи
Ζ, ζ	— дзета	Ξ, ξ	— кси	Χ, χ	— хи
Η, η	— эта	Ο, ο	— омикрон	Ψ, ψ	— пси
Θ, θ, ϑ	— тхэта	Π, π	— пи	Ω, ω	— омега

Оглавление

Предисловие	4
Часть I	
Прикладные задачи по главам курса	
Глава 1. Развитие понятия о числе	6
Пропорции	6
Проценты	8
Округление чисел	10
Оценки и погрешности	11
Приближенные вычисления	14
Глава 2. Корни, степени и логарифмы	15
Приближенные вычисления	15
Сложные проценты	16
Уравнение показательного роста	17
Сравнение скорости роста	18
Глава 3. Прямые и плоскости в пространстве	19
Вычисление геометрических величин	19
Геометрия на местности	21
Глава 4. Комбинаторика	23
Оценка числа возможных вариантов	23
Глава 5. Координаты и векторы	28
Использование векторов в геометрии	28
Векторы в физике	30
Глава 6. Основы тригонометрии	32
Вычисления в геометрии	32
Круговое движение	36
Тригонометрия на местности	38
Глава 7. Функции и графики	40
Табличное задание зависимостей	40
Построение зависимостей	42
Свойства практических зависимостей	46

Глава 8. Многогранники и круглые тела	49
Вычисление геометрических величин	49
Развитие наглядных представлений.....	51
Организация практических измерений	53
Глава 9. Начала математического анализа	55
Экстремальные значения геометрических величин	55
Приложения к механике	58
Исследование физических процессов.....	61
Наглядное представление о производной	62
Глава 10. Интеграл и его применение	65
Вычисление площадей и объемов	65
Интеграл в физике.....	67
Наглядные представления об интеграле	69
Глава 11. Элементы теории вероятностей и математической статистики.....	72
Вычисление статистических характеристик.....	72
Оценка вероятности события	75
Глава 12. Уравнения и неравенства	79
Построение математической модели и ее исследование (текстовые задачи).....	79
Развитие логического мышления при решении уравнений и неравенств	81
Геометрические модели	85

Часть II

Исследовательские работы

Исследовательская работа № 1. Число Архимеда	88
Исследовательская работа № 2. Распад радия	91
Исследовательская работа № 3. Долгота дня.....	92
Исследовательская работа № 4. Траектория движения точки.....	93
Исследовательская работа № 5. Динамика падающего шарика	94
Исследовательская работа № 6. Эллиптическая орбита	95
Исследовательская работа № 7. Неподвижная точка.....	96

Исследовательская работа № 8. Рост банковского вклада	97
Исследовательская работа № 9. Применение интеграла.....	99
Исследовательская работа № 10. Вычисление интеграла.....	101
Исследовательская работа № 11. Графическое решение уравнения	103
Исследовательская работа № 12. Классические методы приближенного вычисления корней уравнения	104
Исследовательская работа № 13. Автомат, извлекающий корень.....	105
Исследовательская работа № 14. Двоичные логарифмы.....	107
Исследовательская работа № 15. Прямоугольный треугольник	109
Исследовательская работа № 16. Равнобедренный треугольник	111
Исследовательская работа № 17. Прямоугольный параллелепипед	114
Исследовательская работа № 18. Золотая середина.	116
Исследовательская работа № 19. Непрерывные дроби.....	119
Исследовательская работа № 20. Наилучшие приближения	122
Часть III	
Проекты	
Проект 1. Обучение и производительность труда	124
Проект 2. Подъем тела из воды	134
Проект 3. Амортизация оборудования.....	140
Проект 4. Переправа через реку	144
Проект 5. Составление елочной гирлянды	149
Проект 6. Векторные диаграммы в цепях переменного тока	154

Проект 7. Параллельное проектирование.....	158
Проект 8. Полуправильные многогранники	164
Проект 9. Коническое отверстие	169
Проект 10. Средний диаметр резьбы	171
Проект 11. Расточка эксцентриков	173
Проект 12. Сферическое и параболическое зеркала.....	175
Проект 13. Деление круга.....	178
Проект 14. Показатель преломления призмы.....	180
Ответы	184
Приложения.....	193

Учебное издание

Башмаков Марк Иванович

Математика

Сборник задач профильной направленности

Учебное пособие

Редактор *Л.В.Честная*

Технический редактор *Н.И.Горбачева*

Компьютерная верстка: *Д.В.Федотов*

Корректор *Г.Н.Петрова*

Изд. № 102114043. Подписано в печать 28.12.2012. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Школьная». Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,0.
Тираж 2 000 экз. Заказ № 33772.

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru

129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1.

Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. АЕ51. Н 16067 от 06.03.2012.

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством
электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПРОФИЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ



Издательский центр «Академия»
www.academia-moscow.ru